

Geometria II

Celso Melchades Doria

2ª Edição

Florianópolis, 2010



Governo Federal
Presidência da República
Ministério de Educação
Secretaria de Ensino a Distância
Universidade Aberta do Brasil

Universidade Federal de Santa Catarina

Reitor: Alvaro Toubes Prata

Vice-Reitor: Carlos Alberto Justo da Silva

Secretário de Educação a Distância: Cícero Barbosa

Pró-Reitora de Ensino de Graduação: Yara Maria Rauh Müller

Pró-Reitora de Pesquisa e Extensão: Débora Peres Menezes

Pró-Reitor de Pós-Graduação: Maria Lúcia de Barros Camargo

Pró-Reitor de Desenvolvimento Humano e Social: Luiz Henrique Vieira Silva

Pró-Reitor de Infra-Estrutura: João Batista Furtuoso

Pró-Reitor de Assuntos Estudantis: Cláudio José Amante

Centro de Ciências da Educação: Wilson Schmidt

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas: Tarciso Antônio Grandi

Centro de Filosofia e Ciências Humanas: Roselane Neckel

Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade à Distância

Coordenação de Curso: Neri Terezinha Both Carvalho

Coordenação de Tutoria: Jane Crippa

Coordenação Pedagógica/CED: Roseli Zen Cerny

Coordenação de Ambientes Virtuais/CFM: Nereu Estanislau Burin

Comissão Editorial

Antônio Carlos Gardel Leitão

Albertina Zatelli

Elisa Zunko Toma

Igor Mozolevski

Luiz Augusto Saeger

Roberto Corrêa da Silva

Ruy Coimbra Charão

Laboratório de Novas Tecnologias - LANTEC/CED

Coordenação Pedagógica

Coordenação Geral: Andrea Lapa, Roseli Zen Cerny

Núcleo de Formação: Nilza Godoy Gomes

Núcleo de Pesquisa e Avaliação: Claudia Regina Flores

Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materiais

Design Gráfico

Coordenação: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Projeto Gráfico Original: Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart
Braga, Natal Anacleto Chicca Junior

Redesenho do Projeto Gráfico: Laura Martins Rodrigues,
Thiago Rocha Oliveira

Diagramação: Laura Martins Rodrigues

Ilustrações: Laura Martins Rodrigues, Ana Clara Miranda Gern

Capa: Talita Ávila Nunes

Design Instrucional

Coordenação: Juliana Machado

Design Instrucional: Alessandra Zago Dahmer, Elenira Oliveira Vilela

Revisão do Design Instrucional: Carla Mörschbacher

Revisão Gramatical: Jane Maria Viana Cardoso

Copyright © 2010, Universidade Federal de Santa Catarina/CFM/CED/UFSC

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Coordenação Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade à Distância.

Ficha Catalográfica

D696g Doria, Celso Melchiades
Geometria II / Celso Melchiades Doria . – Florianópolis : UFSC/
EAD/CED/CFM, 2010.
225p.

ISBN 978-85-99379-90-5

1. Geometria. I. Título.

CDU 51

Sumário

Apresentação	7
1. Relações Métricas em Triângulos: Trigonometria	11
1.1 Relações Métricas em Triângulos.....	13
1.1.1 Relações Métricas num Triângulo Retângulo	13
1.1.2 Relações Métricas num Triângulo qualquer.....	17
1.1.3 Cálculo das Medianas em Função dos Lados	18
1.1.4 Cálculo das Alturas em Função dos Lados	21
1.1.5 Relação de Stewart	24
1.1.6 Cálculo das Bissetrizes em Função dos Lados	25
1.2 Trigonometria	29
1.2.1 Trigonometria no Triângulo Retângulo.....	29
1.2.2 Trigonometria no Círculo	37
1.2.3 Funções trigonométricas	42
1.2.4 Lei dos Cossenos e dos Senos.....	50
1.2.5 Aplicação: Círculos Circunscritos a Triângulos	53
1.2.6 Identidades Trigonométricas.....	58
1.2.7 Aplicação: Círculo Inscrito a um Triângulo	63
1.2.8 Secante, Cossecante e Cotangente	65
1.2.9 Equações Trigonométricas	68
1.2.10 Resolução de Triângulos	71
2. Número π.....	79
2.1 A Questão da Quadratura do Círculo.....	83
2.2 Polígonos Regulares	90
2.2.1 Construção de Polígonos Regulares.....	95
2.3 Construção de π	101
2.3.1 Valor de π	109
2.4 Setores, Segmentos e Coroas Circulares	112
2.5 Fascinante, Irrracional e Transcendente.....	116
3. Geometria no Espaço	125
3.1 Ponto, Reta e Plano.....	127
3.1.1 Posição Relativa entre Retas.....	129
3.1.2 Posição Relativa entre Reta e Plano	130
3.1.3 Posições Relativas entre dois Planos.....	130
3.2 Construção de Sólidos I.....	133
3.2.1 Pirâmides e Cones.....	133

3.2.2 Prismas e Cilindros	134
3.3 Teorema de Thales e Proporcionalidade.....	136
3.4 Perpendicularismo.....	139
3.4.1 Construção de Sólidos II	141
3.5 Projeções Ortogonais.....	143
3.6 Distância.....	146
3.6.1 Distância entre Pontos.....	146
3.6.2 Distância de um Ponto ao Plano.....	149
3.6.3 Distância de um Ponto à Reta	150
3.6.4 Distâncias entre Retas Reversas.....	151
3.7 Ângulos	153
3.7.1 Ângulo entre Retas.....	153
3.7.2 Ângulo entre Planos. Diedros e Triedros.....	153
3.7.3 Ângulo entre Reta e Plano	156
3.8 A Esfera	158
3.9 Áreas e Volumes.....	163
3.9.1 Volume de um Paralelepípedo Retângulo	163
3.9.2 Princípio de Cavalieri	165
3.9.3 Volume e Área do Prisma	166
3.9.4 Volume e Área da Pirâmide.....	173
3.9.5 Volume e Área da Esfera	182
4. Poliedros	187
4.1 Definições e Exemplos.....	189
4.2 Contando Vértices, Arestas e Faces	208
4.2.1 Relação de Euler	209
4.3 Poliedros Planos.....	210
4.4 Grafos × Poliedros.....	212
4.5 Classificação dos Poliedros Regulares	218
Referências	224

Apresentação

Veja na webteca diversas imagens interessantes que mostram a importância dos estudos geométricos e suas manifestações nas artes e na religião.

Lembra-se? Você já estudou as simetrias no Capítulo 6 da Geometria I. Naquele momento você percebeu a importância deste conceito?

Arquétipo

Do grego *arché*, antigo, é o primeiro modelo de alguma coisa.

Historiadores dizem que a geometria surgiu da necessidade de estimarmos comprimentos, áreas e volumes, mas isto não é toda a verdade, apenas uma parte importante dela. Diversas **manifestações culturais** são estruturadas sobre princípios de simetria. Na geometria, o **arquétipo** é a simetria. Isto é mais evidente quando o aspecto visual está presente (figuras, danças, esculturas), porém, na poesia e na música também percebemos a importância da simetria. Nada mais sintetiza tão expressivamente a busca pela simetria do que uma Mandala. O sentido literal da palavra mandala (do sânscrito) é círculo ou centro. Mandala é uma representação geométrica ou dinâmica entre o homem e o cosmos. Sua estrutura de combinações variadas de círculos, quadrados e triângulos em torno de um centro simbolizando a união do plano espiritual com o material, servindo para organizar visões religiosas do mundo, sistemas cósmicos e simbólicos, assim como fatores de nossa psique.

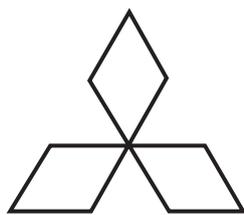


Figura 0.1



Figura 0.2



Figura 0.3

No entanto, a natureza humana é acrescida do desejo e da habilidade para quantificar o que lhe cerca. Nosso objetivo será desenvolver métodos eficientes para quantificarmos comprimentos, áreas e volumes. Apesar desse aspecto racional e pragmático que nosso objetivo nos impõe, em momento algum ignoraremos a necessidade da intuição para resolvermos nossos problemas, por isto, é importante fazermos figuras. Os problemas estão para a matemática assim como a sobrevivência está para a vida. Felizmente, as soluções requerem mais do que simplesmente um algoritmo lógico, requerem idéias! É claro, nosso objetivo não será resolver questões em aberto, não precisaremos ter *idéias inéditas* como quem está na busca de uma descoberta, precisaremos, ape-

nas, estudá-las, reconhecê-las e aprender como aplicá-las. Na Matemática, é necessário entender as estruturas que regem as questões sobre as quais estamos interessados.

É muito importante que ao aprendermos Matemática também refletamos sobre os fundamentos dos métodos e da abrangência dos mesmos. Desta forma, poderemos ganhar bastante experiência e capacidade para resolvermos os problemas. Geometria é uma área fundamental da Matemática por exigir que o estudante alie razão com intuição, pragmatismo com estética e, finalmente, domínio da linguagem matemática.

A Geometria Euclidiana baseia-se sobre dois resultados: o *Teorema de Thales* e o *Teorema de Pitágoras*. Ambos eram conhecidos por povos mais antigos do que os gregos, porém, é mérito dos gregos tê-los demonstrado. Eles são fundamentais para os métodos que desenvolveremos.

Teorema 0.1 (Thales) – Sejam l_1, l_2 e l_3 retas paralelas e r, s retas transversais a l_1, l_2 e l_3 . Sejam $A_i = l_i \cap r$ e $B_i = l_i \cap s$, $i = 1, 2, 3$, os pontos de interseção (figura 0.4). Então,

$$\frac{B_1B_2}{B_2B_3} = \frac{A_1A_2}{A_2A_3}.$$

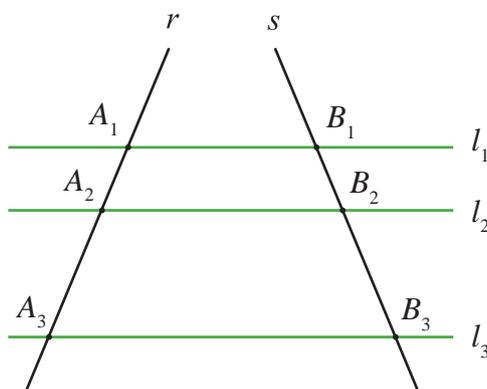


Figura 0.4

Teorema 0.2. (Pitágoras) – Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo no vértice A ($\hat{A} = 90^\circ$) tal que a hipotenusa mede a e os catetos medem b e c (figura 0.5). Então,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

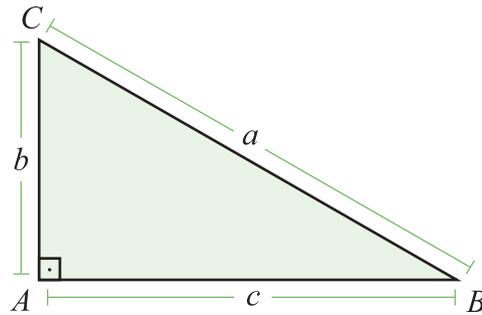


Figura 0.5

O Teorema de Pitágoras será o mais usado, o que não diminui a importância do Teorema de Thales. O Teorema de Pitágoras será usado direta ou indiretamente sempre que estivermos calculando o comprimento de algum segmento de reta, enquanto o Teorema de Thales, quando estivermos comparando comprimentos de figuras semelhantes.

Um dos axiomas da Geometria Euclidiana afirma que dois pontos definem uma única reta no plano. Ao tomarmos três pontos A , B e C no plano, duas situações podem ocorrer: (1) os três definem uma mesma reta, (2) os pontos não estão sobre uma mesma reta e definem três retas. No segundo caso, a cada um dos pares corresponde uma reta:

$$(A, B) \leftrightarrow l_{AB}$$

$$(B, C) \leftrightarrow l_{BC}$$

$$(C, A) \leftrightarrow l_{CA}$$

Definição 0.1. Um Triângulo é a região limitada do plano pelas retas definidas por três pontos não colineares.

Sobre um ponto não há nada mensurável, num segmento podemos medir comprimentos e, num triângulo, podemos medir comprimentos, ângulos e áreas. Logo, os triângulos são as figuras mais simples a serem tratadas após os segmentos; mais do que isto, a partir do conhecimento de como as medidas num triângulo se relacionam podemos estimar as relações em figuras mais complicadas. Este será nosso caminho, aprendermos tudo sobre triângulos e aplicarmos a outras figuras.

Notação: Indicaremos:

- 1) Os pontos por letras latinas maiúsculas. As letras minúsculas serão empregadas para expressarmos as medidas dos segmentos, enquanto as letras gregas minúsculas serão utilizadas para as medidas dos ângulos.
- 2) Por \overline{AB} o segmento definido pelos pontos A e B .
- 3) Por \vec{l}_{AB} a semi-reta orientada definida pelos pontos A e B .
- 4) Por $A\hat{O}B$ o ângulo com vértice em O formado pelas semi-retas \vec{l}_{OA} e \vec{l}_{OB} . Em algumas circunstâncias, também usaremos $A\hat{O}B$ para indicarmos a medida do ângulo.
- 5) Para efeitos de notação e de simplicidade da exposição, ΔABC significa um triângulo com vértices nos pontos A , B e C do plano (figura 0.6). O lado oposto ao vértice A mede a , o oposto a B mede b , e o oposto a C mede c . Os ângulos internos em cada um dos vértices medem α (no vértice A), β (no vértice B) e γ (no vértice C).

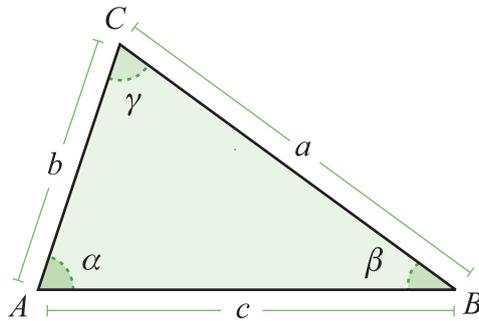


Figura 0.6

Capítulo 1

Relações Métricas em Triângulos: Trigonometria

Capítulo 1

Relações Métricas em Triângulos: Trigonometria

Neste capítulo, determinaremos diversas medidas relativas a um triângulo ΔABC em função dos comprimentos dos lados. Inicialmente, obteremos algumas relações quando ΔABC é retângulo e, a seguir, consideraremos o caso geral.

1.1 Relações Métricas em Triângulos

Nesta seção, vamos obter relações que nos permitem determinar diversas medidas importantes no estudo de triângulos. A primeira e mais famosa é conhecida como Teorema de Pitágoras. Para realizar este estudo começamos considerando triângulos retângulos para, então, generalizarmos para triângulo qualquer.

1.1.1 Relações Métricas num Triângulo Retângulo

Consideramos que $\alpha = 90^\circ$ e D é o pé da altura relativa ao lado \overline{BC} . Abaixo, a tabela estabelece uma nomenclatura e uma notação para os segmentos definidos no ΔABC , conforme ilustra a tabela 1.1:

Sobre os elementos do triângulo, veja o tópico 3.2 do livro de Geometria I.

Num triângulo retângulo, os segmentos que a altura determina sobre a hipotenusa são chamados de projeções (sob ângulo de 90°) dos catetos.

Segmento	Nome	Comprimento
\overline{BC}	hipotenusa	a
\overline{AC}	cateto	b
\overline{AB}	cateto	c
\overline{BD}	projeção	m
\overline{CD}	projeção	n
\overline{AD}	altura	h

Tabela 1.1

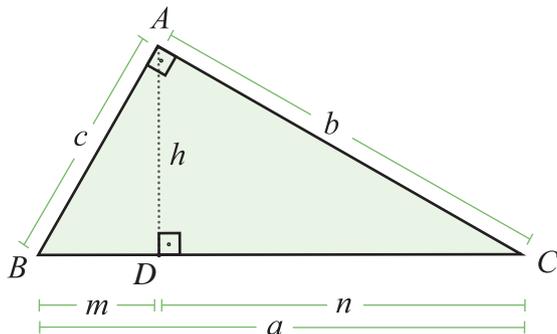


Figura 1.1

Os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle DBA$, e $\triangle DAC$ são semelhantes (caso AA). Comparando-os, temos as seguintes relações:

1) $\triangle ABC \sim \triangle DBA$.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow \begin{cases} bc = ah, (i) \\ c^2 = am, (ii) \\ bm = ch, (iii) \end{cases} \quad (1.1),$$

2) $\triangle DBA \sim \triangle DAC$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = an, (i) \\ cn = bh, (ii) \end{cases} \quad (1.2)$$

3) $\triangle DBA \sim \triangle DAC$

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{h} = \frac{h}{m} \Rightarrow h^2 = mn. \quad (1.3)$$

Teorema 1.1. (Pitágoras) – Num triângulo retângulo $\triangle ABC$ cuja hipotenusa mede a e os catetos medem b e c , vale a identidade

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (1.4)$$

Demonstração: Decorre das identidades 1.1(ii) e 1.2(i) que

$$b^2 + c^2 = a(m+n) = a^2.$$

■

O triângulo sendo retângulo também vale a identidade

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}. \quad (1.5)$$

A verificação é simples, pois

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2 c^2} = \frac{a^2}{a^2 h^2} = \frac{1}{h^2}.$$

Veja mais casos de semelhança de triângulo no livro de Geometria I, tópico 7.3.

Em cada um dos exercícios deste curso, faça um desenho que o/a ajude a pensar sobre a situação que está sendo descrita e quais as informações de que você dispõe.

Lista de Exercícios 1

- 1) Mostre que a diagonal de um quadrado de lado l mede $l\sqrt{2}$.
- 2) Seja $\triangle DEF$ um triângulo equilátero de lado l . Mostre que a altura mede $\frac{l\sqrt{3}}{2}$.
- 3) Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 5 e as projeções dos catetos sobre a altura relativa à hipotenusa medem $m = \frac{9}{5}$ e $n = \frac{16}{5}$. Determine os outros lados e a altura relativa à hipotenusa.

4) Triângulos Pitagóricos.

O conceito de número para os Pitagóricos era restrito aos racionais, pois havia poucos exemplos de números irracionais. Devido ao exemplo da diagonal do quadrado de lado 1, os gregos deram especial atenção aos triângulos cujas medidas dos lados são números inteiros. Eles perguntaram-se sobre um método para encontrar m, n e p tais que $p^2 = m^2 + n^2$ e observaram que

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2.$$

Sejam $p = x^2 + y^2$, $m = x^2 - y^2$ e $n = 2xy$. Faça uma tabela para cada par de números naturais (x, y) , $1 \leq x, y \leq 10$, associando-os à tríade (p, m, n) .

- 5) Mostre que se um cateto for o dobro do outro, então a altura divide a hipotenusa em dois segmentos tais que um é o quádruplo do outro.
- 6) Sejam $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em A , D o pé da altura relativa ao lado BC e E o segmento perpendicular ao lado AB . Mostre que

$$(AD)^2 = (AC) \times (DE).$$

- 7) Sejam a e b números positivos. Mostre que a média geométrica entre a e b é menor que a média aritmética, isto é,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

- 8) Seja a um número real positivo. Construa um segmento com comprimento igual a $a\sqrt{7}$.
- 9) Sejam $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em A , D o ponto médio de \overline{AB} e $\overline{DE} \perp \overline{BC}$. Mostre que

$$(EC)^2 - (EB)^2 = (AC)^2.$$

- 10) Mostre que, dados dois círculos tangentes externamente, o segmento AA' definido pelos pontos de contato é a média geométrica entre os diâmetros dos círculos (figura 1.2).

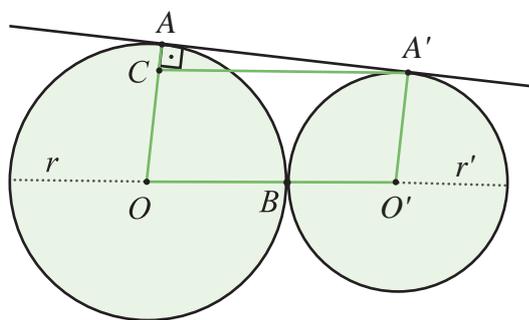


Figura 1.2

- 11) Suponha que, no triângulo $\triangle ABC$, os ângulos \widehat{B} e \widehat{C} são agudos e a razão dos quadrados dos lados opostos a esses ângulos é igual à razão das projeções desses lados sobre \overline{BC} . Mostre que $\triangle ABC$ é retângulo ou isósceles.

- 12) Se os números positivos b, c e h satisfazem a relação

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2},$$

mostre que existem 2 triângulos com lados medindo b, c e a altura relativa ao terceiro lado medindo h . Num dos triângulos, a soma dos ângulos opostos aos lados b e c , respectivamente, será igual a 90° , no outro, a diferença dos ângulos mencionados será 90° .

- 13) Considere duas circunferências externas com raios r, r' e cuja distância entre os centros mede d . Determine os comprimentos dos segmentos tangentes comuns (existem 4 tangentes comuns, figura 1.3).

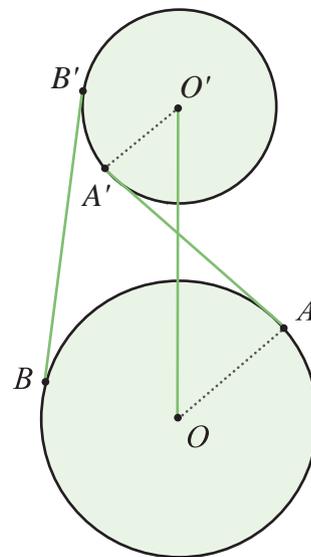


Figura 1.3

1.1.2 Relações Métricas num Triângulo qualquer

Agora, seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer (figura 1.4).

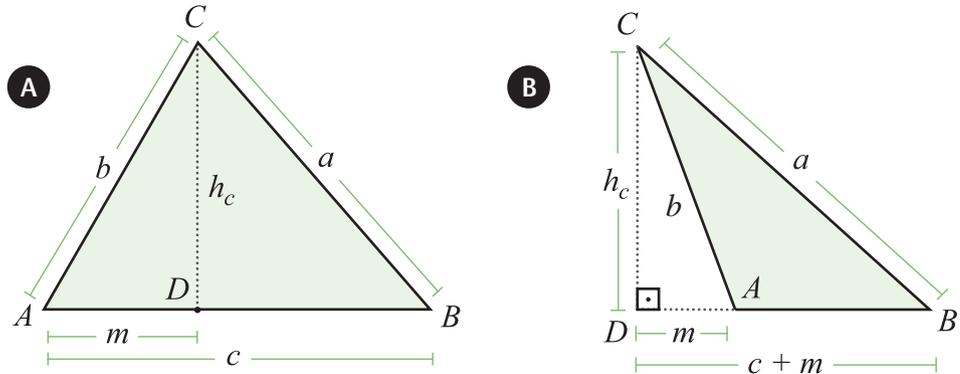


Figura 1.4

Suponhamos que as medidas a, b e c dos lados de $\triangle ABC$ são conhecidas. Sejam D o pé da altura relativa ao lado \overline{AB} , h_c a medida da altura \overline{CD} e m a medida da projeção do lado \overline{AC} sobre o lado \overline{AB} . Observe que há dois casos para analisarmos: (a) $\triangle ABC$ é acutângulo (b) $\triangle ABC$ é obtusângulo. Em ambos os casos, a construção da altura \overline{CD} gera dois novos triângulos, ambos retângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BCD$.

a) $\triangle ABC$ é acutângulo (figura 1.4a).

Suponhamos que $\hat{A} < 90^\circ$. Neste caso, temos que D está entre A e B , e $c = m + (c - m)$:

$$\triangle ADC \Rightarrow b^2 = m^2 + h_c^2,$$

$$\triangle BDC \Rightarrow a^2 = (m - c)^2 + h_c^2.$$

Conseqüentemente,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm. \quad (1.6)$$

b) $\triangle ABC$ é obtusângulo (figura 1.4b).

Suponhamos que $\hat{A} > 90^\circ$. Neste caso, temos que D não está entre A e B , e $BD = c + m$:

$$\triangle ADC \Rightarrow b^2 = m^2 + h_c^2,$$

$$\triangle BDC \Rightarrow a^2 = (m + c)^2 + h_c^2.$$

Conseqüentemente,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm. \quad (1.7)$$

Lista de Exercícios 2

- 1) Mostre que num paralelogramo a soma dos quadrados dos lados é igual a soma dos quadrados das diagonais.

1.1.3 Cálculo das Medianas em Função dos Lados

Num triângulo $\triangle ABC$, a mediana relativa ao vértice A é o segmento \overline{AD} ligando o vértice A ao ponto médio D do lado \overline{BC} (figura 1.5). Existem três medianas em $\triangle ABC$, cujas medidas denotamos por m_A (relativa a A), m_B (relativa a B) e m_C (relativa a C).

Ponto médio

Ponto médio é o ponto pertencente ao segmento que o subdivide em dois segmentos de mesma medida.

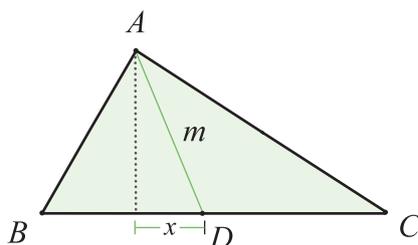


Figura 1.5

Existem dois triângulos resultantes da construção do ponto D , digamos que sejam $\triangle ADB$ e $\triangle ADC$. Ao aplicarmos as identidades 1.6 e 1.7, obtemos:

$$\triangle ADB \Rightarrow c^2 = m_A^2 + \frac{a^2}{4} - 2\frac{a}{2}x,$$

$$\triangle ADC \Rightarrow b^2 = m_A^2 + \frac{a^2}{4} + 2\frac{a}{2}x.$$

Somando as expressões acima, segue que

$$b^2 + c^2 = 2m_A^2 + \frac{a^2}{2}$$

e

$$m_A = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}. \quad (1.8)$$

Analogamente

$$m_B = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}, \quad (1.9)$$

$$m_C = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}. \quad (1.10)$$

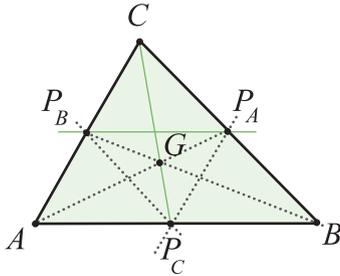


Figura 1.6

O ponto de interseção das medianas é denominado *baricentro* do triângulo (figura 1.6) e o denotamos por G .

A seguir, mostraremos algumas propriedades do baricentro. Inicialmente, fixamos a seguinte notação: sejam P_A, P_B, P_C os pés das medianas m_A, m_B, m_C , respectivamente, e G o baricentro (figura 1.6).

Proposição 1.2. Considerando o triângulo da figura 1.6, valem as seguintes igualdades:

$$P_B P_A = \frac{1}{2} AB, \quad P_A P_C = \frac{1}{2} AC, \quad P_B P_C = \frac{1}{2} BC.$$

Este teorema está discutido na Introdução e no livro de Geometria I (Teorema 7.10).

Demonstração. Na figura 1.6, decorre do **Teorema de Tales** que $P_B P_A P_C A$ é um paralelogramo. Portanto, $P_B P_A = AP_C = \frac{1}{2} AB$. Os outros casos são análogos. ■

Proposição 1.3. Num triângulo ΔABC qualquer valem as relações:

$$GA = \frac{2}{3} m_A, \quad GB = \frac{2}{3} m_B, \quad GC = \frac{2}{3} m_C. \quad (1.11)$$

Demonstração. Conforme ilustra a figura 1.5, temos o caso de semelhança $\Delta GAB \sim \Delta GP_A P_B$, do qual,

$$\frac{GA}{GP_A} = \frac{GB}{GP_B} = \frac{AB}{P_A P_B} = 2$$

e

$$GA = 2(GP_A), \quad GB = 2(GP_B), \quad GC = 2(GP_C).$$

Conseqüentemente,

$$\frac{m_A}{GP_A} = \frac{GA + GP_A}{GP_A} = 3 \Rightarrow GP_A = \frac{m_A}{3},$$

$$\frac{m_B}{GP_B} = \frac{GB + GP_B}{GP_B} = 3 \Rightarrow GP_B = \frac{m_B}{3}.$$

Analogamente, $GP_C = \frac{m_C}{3}$. Assim, a relação 1.11 está verificada, pois

$$m_A = \frac{m_A}{3} + GA \Rightarrow GA = \frac{2}{3}m_A.$$

■

Exemplo. Se G é o baricentro de ΔABC , então

$$(AB)^2 + (BC)^2 + (CA)^2 = 3((GA)^2 + (GB)^2 + (GC)^2). \quad (1.12)$$

Ao somarmos as relações abaixo, satisfeitas pelas medianas de ΔABC ;

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2},$$

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2},$$

$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}.$$

obtemos

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

da onde,

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2).$$

Como $m_A = \frac{3}{2}(GA)$, $m_B = \frac{3}{2}(GB)$ e $m_C = \frac{3}{2}(GC)$, a verificação da expressão 1.12 está completa.

Lista de Exercícios 3

- 1) Num triângulo qualquer de lados medindo a, b e c , seja D o pé da mediana relativa ao lado \overline{BC} e E o ponto obtido pela projeção da mediana \overline{AD} sobre o lado \overline{BC} . Fazendo $n = \overline{DE}$, mostre que

$$c^2 - b^2 = 2amn.$$

- 2) Determine os lados de um triângulo em função das medianas.
- 3) Mostre que num retângulo $ABCD$ a soma dos quadrados das distâncias de um ponto M a dois vértices opostos A e C é igual à soma dos quadrados de suas distâncias aos dois outros vértices B e D .
- 4) Mostre que em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados das três medianas é igual a três vezes a metade do quadrado da hipotenusa.
- 5) Mostre que a soma dos quadrados dos lados de um quadrilátero é igual à soma dos quadrados das diagonais mais quatro vezes o quadrado do segmento que une os meios dessas diagonais.
- 6) Mostre que o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados de suas distâncias aos pontos fixos A e B é k^2 é um círculo com centro no ponto médio de \overline{AB} .
- 7) Suponha que os lados de um triângulo $\triangle ABC$ satisfazem a relação $2a^2 = b^2 + c^2$. Calcule as medianas e mostre que o triângulo cujos lados tem comprimentos iguais às medianas é semelhante a $\triangle ABC$.
- 8) Mostre que um triângulo $\triangle ABC$ é semelhante ao triângulo formado pelas suas medianas se, e somente se, os quadrados dos seus lados estão em progressão aritmética.
- 9) Conclua que o baricentro existe e é único.

1.1.4 Cálculo das Alturas em Função dos Lados

O segmento altura relativo ao lado \overline{AB} é o segmento ortogonal à reta que contém \overline{AB} , passando pelo vértice C ; sejam D o pé desta altura e h_c a sua medida. Ao traçarmos a altura relativa ao lado \overline{AB} , obtemos triângulos $\triangle DAC$ e $\triangle DBC$, ambos retângulos no vértice D . Seja m a medida de \overline{AD} . Os casos quando $\triangle ABC$ é acutângulo e quando é obtusângulo (figura 1.7a e 1.7b) são tratados juntos:

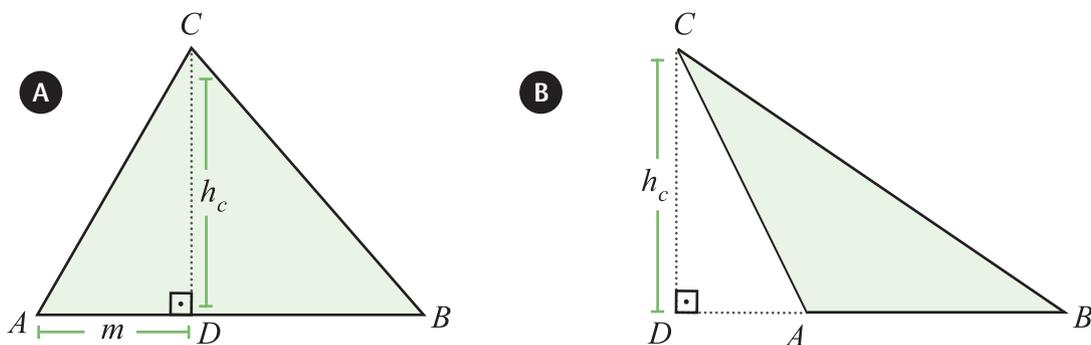


Figura 1.7

$$\triangle ADC \Rightarrow h_c^2 = b^2 - m^2,$$

$$\triangle ABC \Rightarrow m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\pm 2c}.$$

Ao substituírmos na 1ª expressão o valor de m obtido na 2ª, temos

$$\begin{aligned} 4c^2 h_c^2 &= 4b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = \\ &= (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = \\ &= [2bc + b^2 + c^2 - a^2] \cdot [2bc - b^2 - c^2 + a^2] = \\ &= [(b+c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b+c)^2] = \\ &= (a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c). \end{aligned}$$

Se considerarmos $2p = (a+b+c)$, a expressão acima se torna

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (1.13)$$

Analogamente,

$$h_A = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad (1.14)$$

$$h_B = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (1.15)$$

Uma consequência importante do cálculo das alturas é a determinação da área A do triângulo em função dos comprimentos dos lados, conhecida como fórmula de **Herão**:

p é o semiperímetro de $\triangle ABC$.

Heron (ou Hero, ou Herão) de Alexandria (10 d.C. - 70 d.C.) foi um sábio do começo da era cristã. Geômetra e engenheiro grego. Seu trabalho mais importante no campo da geometria, *Metrica*, permaneceu desaparecido até 1896.

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (1.16)$$

O ponto de interseção das alturas é denominado *ortocentro* do triângulo (figura 1.8).

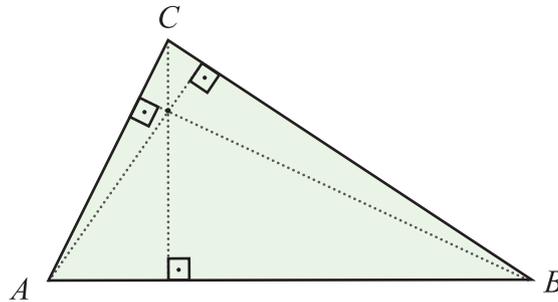


Figura 1.8

Lista de Exercícios 4

- 1) Determine os lados de um triângulo em função das alturas.
- 2) Num triângulo retângulo $\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$, traçam-se a altura \overline{AD} e, em seguida, \overline{DE} e \overline{DF} perpendiculares a \overline{AB} e \overline{AC} respectivamente. Se $\overline{BE} = m$, $\overline{CF} = n$ e $\overline{AD} = h$, mostre que:
 - a) $\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{a^2}$;
 - b) $3h^2 + m^2 + n^2 = a^2$;
 - c) $h^2 = amn$.
- 3) Num triângulo $\triangle ABC$, sejam $\overline{AB} = \frac{1}{3}$, $\overline{AC} = \frac{1}{4}$ e a altura $\overline{AD} = \frac{1}{5}$. Calcule o comprimento do lado \overline{BC} (há dois casos para considerarmos, num deles $\hat{C} = 90^\circ$ e no outro $\hat{C} - \hat{B} = 90^\circ$).
- 4) Conhecendo-se os comprimentos dos lados de um triângulo isósceles, calcule sua altura.
- 5) Mostre que o ortocentro existe.

1.1.5 Relação de Stewart

Num triângulo $\triangle ABC$ de lados medindo a , b e c , seja D um ponto sobre o lado \overline{AB} tal que $\overline{AD} = x$, $\overline{DB} = y$ e $\overline{CD} = z$, conforme ilustra a figura 1.9.

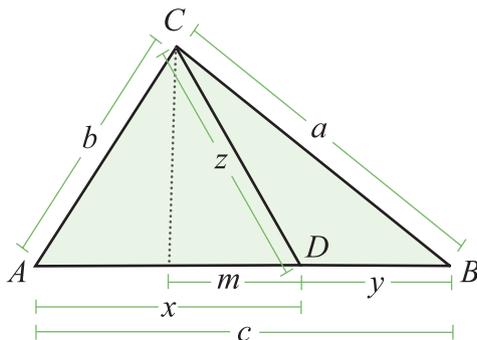


Figura 1.9

Proposição 1.4. No $\triangle ABC$ vale a relação de Stewart:

$$a^2x + b^2y - z^2c = cxy. \quad (1.17)$$

Demonstração. Para demonstrarmos a relação acima, traçamos a altura relativa ao lado \overline{AB} e consideramos que a medida do segmento definido pelo pé da altura até D é m (figura 1.9). Assim,

$$\triangle ACD \Rightarrow b^2 = x^2 + z^2 \pm 2xm, \quad (1.18)$$

$$\triangle BCD \Rightarrow a^2 = y^2 + z^2 \pm 2ym. \quad (1.19)$$

Multiplicando a expressão 1.18 por y e a expressão 1.19 por x temos

$$b^2y = x^2y + z^2y \pm 2xmy,$$

$$a^2x = y^2x + z^2x \pm 2xmx.$$

Somando as expressões acima chegamos a

$$a^2x + b^2y = xy(x + y) + z^2(x + y),$$

da qual, substituindo $c = x + y$, segue a relação 1.17. ■

Exemplo. Seja C um círculo de raio R e centro em O com três círculos C_1, C_2 e C_3 dentro dele, conforme ilustra a figura 1.10a. C_1 tem raio R_1 e centro em O_1 , enquanto C_2 tem raio R_2 e centro em O_2 . Vejamos que a relação de Stewart determina o raio x de C_3 , sabendo que $OO_1 = a$ e $OO_2 = b$. Para isto, aplicamos a relação de Stewart 1.17 ao $\Delta O_1O_2O_3$ (figura 1.10b):

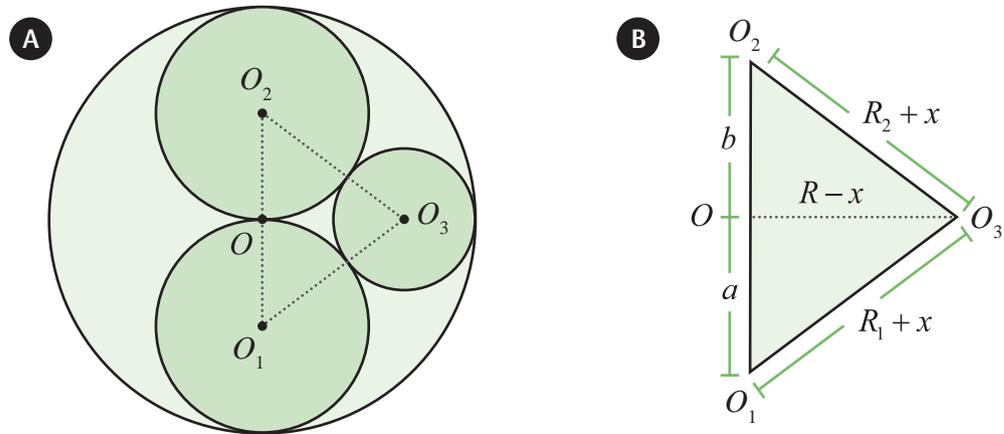


Figura 1.10

$$a(R_2 + x)^2 + b(R_1 + x)^2 - (a + b)(R - x)^2 = a(b + b).$$

Após expandirmos a expressão acima, obtemos

$$x = \frac{(a + b)(R^2 + ab) - (aR_2^2 + bR_1^2)}{2[aR_2 + bR_1 + (a + b)R]}.$$

Lista de Exercícios 5

- 1) Considere no exemplo acima $R_1 = 1$, $R_2 = 2$ e desenhe o círculo C_3 .

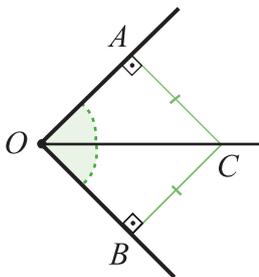


Figura 1.11

1.1.6 Cálculo das Bissetrizes em Função dos Lados

A reta bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ é a reta passando por O que equidista das semi-retas \vec{l}_{OA} e \vec{l}_{OB} . Seja C um ponto sobre a bissetriz do $A\hat{O}B$, devido à definição, a bissetriz divide o ângulo $A\hat{O}B$ em dois ângulos congruentes $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$ (figura 1.11).

A cada ângulo também associamos a reta bissetriz do seu suplemento. Desta forma, a cada vértice de um triângulo $\triangle ABC$ associamos a bissetriz interna (do ângulo interno) e a bissetriz externa (do ângulo externo).

O ponto de interseção das bissetrizes internas é denominado o *incentro* do triângulo.

Proposição 1.5. Seja $\triangle ABC$ um triângulo com lados medindo a , b e c .

- 1) Ao traçarmos a bissetriz interna relativa ao vértice A obtemos, na interseção com o lado \overline{BC} o ponto D . Se $x = \overline{BD}$ e $y = \overline{DC}$ (figura 1.12a), então

$$x = \frac{ac}{b+c}, \quad y = \frac{ab}{b+c}.$$

- 2) Ao traçarmos a bissetriz externa relativa ao vértice A obtemos na interseção com o lado \overline{BC} o ponto D' . Se $x = \overline{BD'}$ e $y = \overline{D'C}$ (figura 1.12b), então

$$x = \frac{ab}{c-b}, \quad y = \frac{ac}{c-b}.$$

Demonstração:

- 1) Pelo vértice B , traçamos uma reta paralela à bissetriz \overline{AD} gerando o ponto E na interseção com o prolongamento do lado \overline{AC} . Segue do Teorema de Tales que

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{AE}.$$

No entanto, decorre do paralelismo entre os segmentos \overline{BE} e \overline{AD} , que (1) $\hat{AEB} = \hat{CAD} = \hat{DAB}$ (2) $\hat{EBA} = \hat{BAD}$. Conseqüentemente, o triângulo $\triangle ABE$ é isósceles e, por isso, $\overline{AE} = c$. Daí que,

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{y+x}{x} = \frac{b+c}{c} \xrightarrow{a=x+y} \frac{a}{x} = \frac{b+c}{c}.$$

Portanto,

$$x = \frac{ac}{b+c}, \quad y = \frac{ab}{b+c}.$$

Por que se pode afirmar esta igualdade?

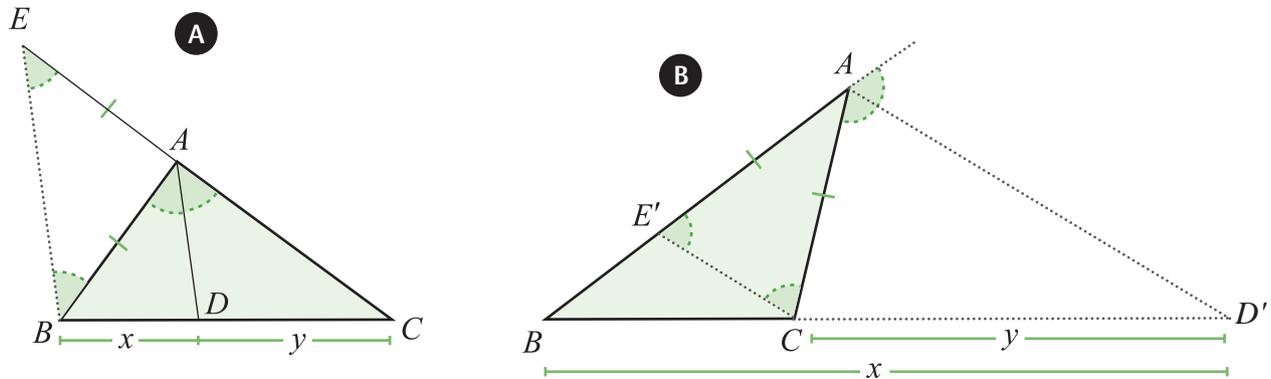


Figura 1.12

- 2) Pelo vértice C traçamos uma reta paralela à bissetriz externa $\overline{AD'}$ gerando o ponto E' na interseção com o lado \overline{AB} . Segue do Teorema de Tales que

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{AE'}$$

No entanto, o paralelismo entre os segmentos $\overline{CE'}$ e $\overline{AD'}$ implica em (1) $\widehat{ACE'} = \widehat{CAD'}$ e (2) $\widehat{AE'C} = \widehat{CAD'}$ (pois \overline{AD} é bissetriz). Conseqüentemente, o triângulo $\triangle ACE'$ é isósceles e, por isso, $AE' = b$. Daí que,

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{x-y}{y} = \frac{c-b}{b} \xrightarrow{a=x-y} \frac{a}{y} = \frac{c-b}{b}$$

Portanto,

$$x = \frac{ac}{c-b}, \quad y = \frac{ab}{c-b}$$

Agora, determinaremos os comprimentos s_A e s'_A das bissetrizes interna e externa, respectivamente, relativas ao vértice A . Para isto, usaremos a relação de Stewart 1.17;

Substituindo $x = \frac{ac}{b+c}$, $y = \frac{ab}{b+c}$ na Relação de Stewart

$$b^2x + c^2y - s_A^2a = axy,$$

obtemos

$$b^2 \frac{ac}{b+c} + c^2 \frac{ab}{b+c} - s_A^2a = a \frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$

de onde,

$$s_A^2a = \frac{a [(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = \frac{a (b+c-a)(b+c+a)}{(b+c)^2}.$$

Aplicando o semiperímetro $2p = a + b + c$, chegamos a

$$s_A = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}. \quad (1.20)$$

Analogamente,

$$s_B = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)}, \quad (1.21)$$

$$s_C = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}. \quad (1.22)$$

■

Lista de Exercícios 6

- 1) Mostre que as bissetrizes externas são determinadas pelas expressões:

$$s'_A = \frac{2}{|b-c|} \sqrt{bcp(p-b)(p-c)}, \quad (1.23)$$

$$s'_B = \frac{2}{|a-c|} \sqrt{acp(p-a)(p-c)}, \quad (1.24)$$

$$s'_C = \frac{2}{|a-b|} \sqrt{abp(p-a)(p-b)}. \quad (1.25)$$

- 2) Um triângulo $\triangle ABC$, retângulo em A , tem lados $\overline{AB} = 24$, $\overline{BC} = 25$ e $\overline{AC} = 7$. Calcule a bissetriz do ângulo \hat{C} .
- 3) Dado um triângulo $\triangle ABC$, retângulo em A , no qual $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e a bissetriz do ângulo reto mede $\overline{AD} = l$, mostre que

$$\frac{\sqrt{2}}{l} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

1.2 Trigonometria

Trigonometria é o ramo da Matemática que trata das relações entre os lados e os ângulos de triângulos. A trigonometria começou eminentemente prática para determinar as distâncias que não podiam ser medidas diretamente. Serviu à navegação, à agrimensura e à astronomia.

Consulte o livro de Geometria I – congruência de triângulos, seção 3.4.

De acordo com o **axioma de congruência**, ao fixarmos o comprimento de dois lados e a medida do ângulo formado entre eles (caso LAL), então todas as medidas dos lados e dos ângulos do triângulo estarão fixas. Como consequência do axioma temos outros 3 tipos de casos de congruência:

- 1) LLL (lado-lado-lado),
- 2) LA (ângulo-lado-ângulo),
- 3) LLA (lado-lado-ângulo).

Em cada um dos casos de congruência, se as medidas dos elementos citados forem fixadas, todas as outras medidas relativas ao triângulo também estarão fixadas, a nossa tarefa será determiná-las. A estas relações denominamos de relações métricas em triângulos.

Conforme já discutimos, o triângulo é o elemento geométrico mais simples após o ponto e a reta. Desde a antiguidade o raciocínio lógico-dedutivista está sempre baseado numa estratégia redutivista, onde entendemos o todo a partir dos elementos mais simples. Na geometria, o átomo é o triângulo. A experiência com a determinação das distâncias e dos comprimentos, muito comum na agrimensura e na astronomia, mostrou-nos que o conhecimento das relações métricas entre os lados e ângulos de um triângulo é extremamente útil para a **solução de problemas**.

Para conhecer alguns destes problemas, leia o artigo no endereço <<http://www.ensinomedioimpa.br/materiais/tep/cap4.pdf>> que mostra questões interessantes resolvidas por meio da trigonometria e suas resoluções.

1.2.1 Trigonometria no Triângulo Retângulo

Sejam O , A e B três pontos não colineares, \vec{l}_{OA} e \vec{l}_{OB} as semi-retas definidas por estes pontos, e θ ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$) a medida do ângulo $A\hat{O}B$, conforme mostra a figura 1.13.

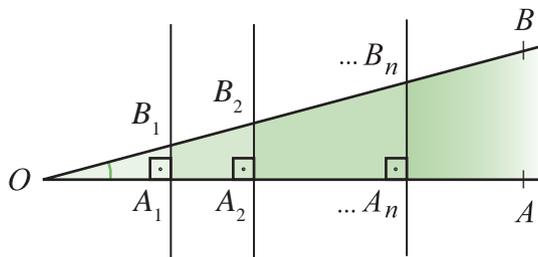


Figura 1.13

Ao traçarmos as retas r_1, r_2, \dots, r_n ortogonais a \vec{l}_{OA} obtemos triângulos retângulos $\Delta OA_1B_1, \Delta OA_2B_2, \dots, \Delta A_nB_n$. Decorre do Teorema de Tales que os comprimentos dos segmentos na figura 1.13 satisfazem a relação:

$$\frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \dots = \frac{A_nB_n}{OB_n}. \quad (1.26)$$

Ao considerarmos a família de triângulos retângulos $\{\Delta OA_kB_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, a relação 1.26 significa que a razão entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo θ e a hipotenusa do triângulo, para cada um dos triângulos, é constante (independe de n). Portanto, associamos ao ângulo $A\hat{O}B$ a razão definida em 1.26, a qual denominamos por *seno de θ* e a denotamos $\text{sen}(\theta)$:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \dots = \frac{A_nB_n}{OB_n}. \quad (1.27)$$

Analogamente, ao considerarmos a razão do cateto adjacente pela hipotenusa para cada um dos triângulos da família $\{\Delta OA_kB_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, concluímos que ela também é constante. A esta razão, denominamos de *co-seno de θ* e a denotamos $\text{cos}(\theta)$:

$$\text{cos}(\theta) = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = \dots = \frac{OA_n}{OB_n}. \quad (1.28)$$

Além destas duas quantidades associadas ao ângulo θ , também definimos a *tangente de θ* , denotada por $\text{tg}(\theta)$, que é a razão do comprimento do cateto oposto sobre o comprimento do cateto adjacente:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \dots = \frac{A_nB_n}{OA_n} \Rightarrow \text{tg}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}. \quad (1.29)$$

Ao considerarmos um triângulo retângulo ΔABC , no qual $\hat{A} = 90^\circ$, a hipotenusa mede a e os catetos medem b e c , o seno, o cosseno e a tangente do ângulo $\hat{B} = \theta$ valem

$$\text{sen}(\theta) = \frac{b}{a}, \quad \text{cos}(\theta) = \frac{c}{a}, \quad \text{tg}(\theta) = \frac{b}{c}.$$

Decorre do Teorema de Pitágoras que

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1.$$

Assim, obtemos a *Identidade Fundamental da Trigonometria*:

$$\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1 \quad (1.30)$$

Lista de Exercícios 7

- 1) Seja ΔABC um triângulo retângulo com $\hat{A} = 90^\circ$, $a = 5$, $b = 4$ e $c = 3$. Seja β a medida do ângulo interno do vértice B . Calcule $\cos(\beta)$, $\text{sen}(\beta)$ e $\text{tg}(\beta)$.
- 2) No item anterior, seja γ a medida do ângulo interno do vértice C e calcule $\cos(\gamma)$, $\text{sen}(\gamma)$ e $\text{tg}(\gamma)$. Compare os resultados com os obtidos no item anterior.
- 3) Conclua que $\cos(90^\circ) = 0$ e $\text{sen}(90^\circ) = 1$; $\cos(0^\circ) = 1$ e $\text{sen}(0^\circ) = 0$.
- 4) Desenvolva um método para medir a altura de um prédio utilizando apenas de uma trena de 5 metros (dica: use a posição do sol e a sombra do prédio).

Ângulos complementares

Dois ângulos são ditos complementares quando a soma de suas medidas é 90° .

Proposição 1.6. Se dois ângulos β e γ são complementares, então

$$\text{sen}(\beta) = \cos(\gamma), \quad \cos(\beta) = \text{sen}(\gamma), \quad \text{tg}(\beta) = \frac{1}{\text{tg}(\gamma)}. \quad (1.31)$$

Demonstração. Segue da hipótese que $\beta + \gamma = 90^\circ$. Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo com ângulos internos medindo $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = \beta$ e $\hat{C} = \gamma$, a hipotenusa mede a e os catetos medem b e c (figura 1.14). O seno e o cosseno do ângulo β valem

$$\cos(\beta) = \frac{c}{a}, \quad \text{sen}(\beta) = \frac{b}{a}.$$

Analogamente,

$$\cos(\gamma) = \frac{b}{a}, \quad \text{sen}(\gamma) = \frac{c}{a}.$$

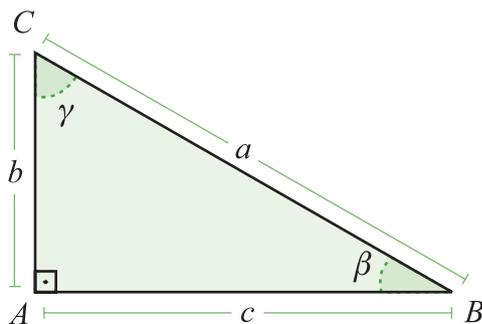


Figura 1.14

Portanto $\text{sen}(\beta) = \cos(\gamma)$ e $\cos(\beta) = \text{sen}(\gamma)$. Além disto,

$$\text{tg}(\beta) = \frac{1}{\text{tg}(\gamma)}.$$

■

Decorre, da proposição acima, que os valores de $\cos(\alpha)$, $\text{sen}(\alpha)$, e $\text{tg}(\alpha)$ para ângulos no intervalo $[0^\circ, 45^\circ]$ determinam os valores do *cosseno*, *seno*, e da *tangente* para ângulos no intervalo $[45^\circ, 90^\circ]$.

Exemplo. A seguir, calcularemos os valores do *cosseno* e do *seno* para alguns ângulos:

1) $\theta = 30^\circ$.

Seja $\triangle ABC$ um triângulo equilátero (figura 1.15) de lado a e D o pé da altura relativa ao lado \overline{AB} . Assim, o triângulo $\triangle ADC$ é retângulo e $\hat{D} = 90^\circ$, $\hat{A} = 60^\circ$ e $\hat{C} = 30^\circ$. Além disto, $\overline{AC} = a$, $\overline{AD} = \frac{a}{2}$ e $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Conseqüentemente,

$$\cos(30^\circ) = \frac{a \frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{sen}(30^\circ) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}.$$

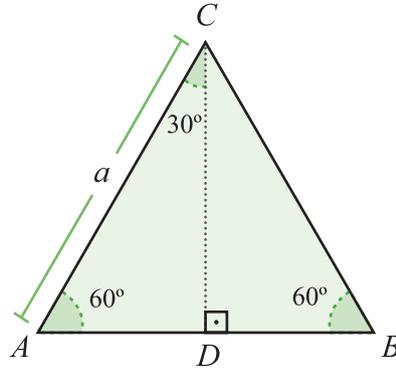


Figura 1.15

2) $\theta = 45^\circ$.

Consideramos o triângulo retângulo $\triangle ABC$ (figura 1.16) tal que $\hat{A} = \hat{C} = 45^\circ$ e $\hat{B} = 90^\circ$. Desta forma, $AB = BC = l$, $AC = l\sqrt{2}$. Conseqüentemente,

$$\cos(45^\circ) = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{sen}(45^\circ) = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

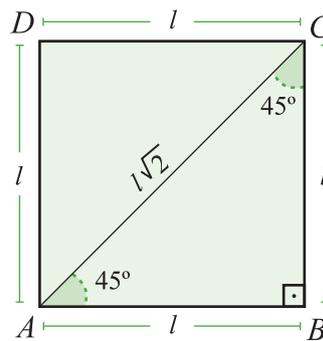


Figura 1.16

3) $\theta = 60^\circ$.

Basta aplicarmos a Proposição 1.6 para concluirmos que

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4) $\theta = 18^\circ$.

Consideramos o triângulo isósceles $\triangle ABC$ (figura 1.17) tal que $\hat{A} = 36^\circ$, $\hat{B} = \hat{C} = 72^\circ$ e $\overline{AC} = b$. Ao traçarmos a bissetriz do vértice C construímos o triângulo $\triangle DBC$, onde

$$\hat{D} = \hat{B} = 72^\circ, \quad \hat{BCD} = 36^\circ.$$

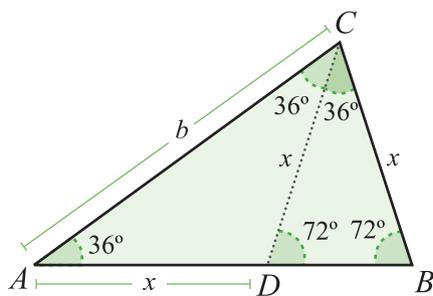


Figura 1.17

Da semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CDB$ (caso AAA), se $DC = x$, então

$$\frac{x}{b-x} = \frac{b}{x} \Rightarrow x = b \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

O valor de x é a conhecida razão áurea relativa à medida b . Ao traçarmos no triângulo $\triangle ABC$ a altura relativa à base \overline{BC} , com pé no ponto H , obtemos o triângulo retângulo $\triangle ABH$ (figura 1.18).

No $\triangle ABH$ temos

$$\hat{A} = 18^\circ, \quad \hat{B} = 72^\circ, \quad \hat{H} = 90^\circ, \quad \overline{AB} = b, \quad \overline{BH} = \frac{x}{2}.$$

Portanto, $\sin(18^\circ) = \frac{x}{2b} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ e, pela identidade fundamental da trigonometria 1.30, $\cos(18^\circ) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

$$\cos(18^\circ) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

5) $\theta = 72^\circ$.

Basta aplicarmos a Proposição 1.6 para concluirmos que

$$\cos(72^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \sin(72^\circ) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

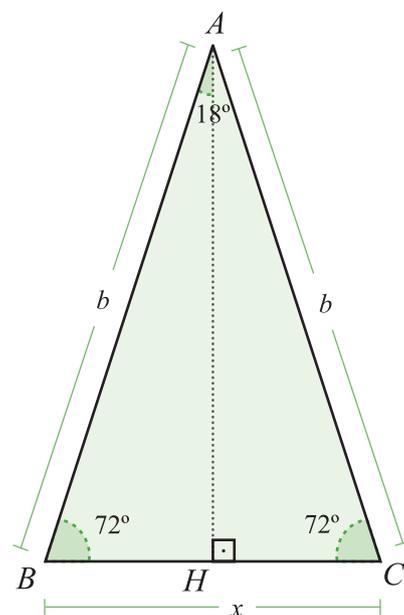


Figura 1.18

Como consequência dos conceitos introduzidos, a cada ângulo $\theta \in [0, 90^\circ]$ associamos os valores do *seno* e do *coosseno*:

$$\theta \rightarrow (\cos(\theta), \text{sen}(\theta)).$$

Lista de Exercícios 8

Resolver um triângulo significa determinar os valores dos comprimentos dos lados e dos seus ângulos internos.

- 1) Resolva um triângulo retângulo $\triangle ABC$ sabendo que a medida da hipotenusa $a = 25$, a soma dos catetos $b + c = 31$ e $b > c$ (deixe os ângulos indicados em função do cosseno).
- 2) Resolva um triângulo retângulo $\triangle ABC$ de hipotenusa a , sabendo que $a + b = 36m$ e $a + c = 50m$.
- 3) Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$ (figura 1.19) são retângulos, respectivamente, em B e C .

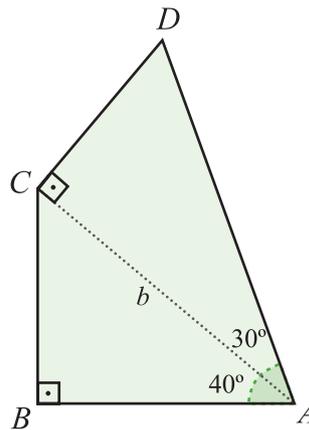


Figura 1.19

- a) Achar o valor aproximado dos comprimentos \overline{AB} e \overline{CD} .
 - b) Achar o comprimento exato do lado \overline{AD} .
- 4) Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo. Calcule
- a) o cosseno do maior ângulo agudo se os lados de $\triangle ABC$ estão em progressão aritmética.
 - b) o cosseno do maior ângulo agudo se os lados de $\triangle ABC$ estão em progressão geométrica.

5) Observando a figura 1.20 abaixo, mostre que

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{1 + \cos(\theta)}.$$

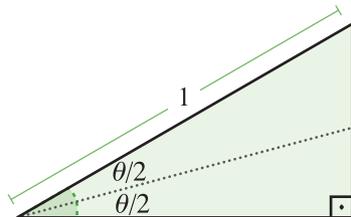


Figura 1.20

6) Um observador em uma planície vê ao longe uma montanha segundo um ângulo de 15° (ângulo no plano vertical formado por um ponto no topo da montanha, o observador e o plano horizontal). Após caminhar uma distância d em direção à montanha, ele passa a vê-la segundo um ângulo de 30° . Qual é a altura da montanha?

Aqui sua resposta será dada em função da distância d .

7) Um ponto A dista 5 cm de um círculo com raio de 3 cm . São traçadas as tangentes \overline{AB} e \overline{AC} ao círculo. Calcule o seno do ângulo \widehat{OAB} .

8) Para medir a altura de uma chaminé (figura 1.21), um observador utilizou um aparelho especial que estabeleceu a horizontal \overline{AB} e mediu os ângulos α e β tendo a seguir medido $\overline{BC} = h$. Determine a altura da chaminé.

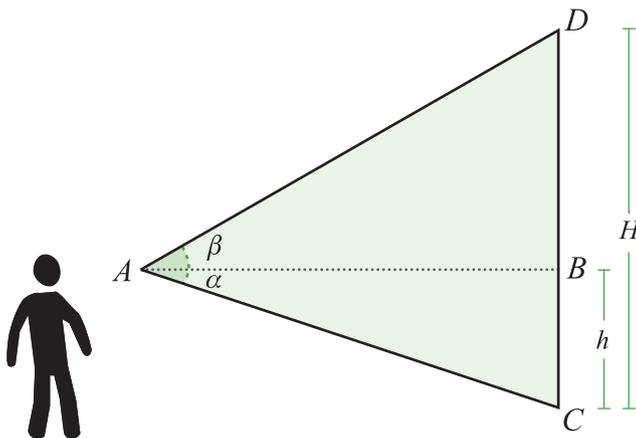


Figura 1.21

1.2.2 Trigonometria no Círculo

Para aplicarmos os conceitos de *seno* e *co seno* aos problemas geométricos envolvendo triângulos precisamos estendê-los para ângulos $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$. Até aqui, estes conceitos foram definidos usando triângulos retângulos, porém também existem os triângulos obtusângulos e os acutângulos.

Axioma 1.7. Fixada uma medida para o ângulo raso, denotada 180° , existe uma relação biunívoca entre o intervalo $[0, 180]$ e as semi-retas de mesma origem que dividem um dado semi-plano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes.

De acordo com o axioma anterior, a medida de um ângulo no plano está entre 0° e 360° , o que mostra a necessidade de generalizarmos os conceitos trigonométricos para qualquer ângulo $\theta \in [0^\circ, 360^\circ]$.

Introduziremos uma maneira mais propícia para medirmos um ângulo usando um círculo. Para este fim, consideramos um par de eixos ortogonais coordenados no plano, denominados *eixo-x* e *eixo-y*, de forma que a todo ponto do plano corresponde uma coordenada $P = (x_p, y_p)$, onde x_p é a abscissa de P e y_p a ordenada de P são as projeções ortogonais de P sobre cada um dos eixos (figura 1.22). A interseção dos eixos é denominada a origem do sistema coordenado e a denotamos por O . O plano é o conjunto dos pontos

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}. \quad (1.32)$$

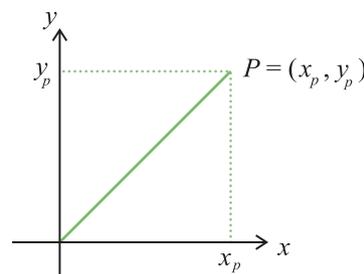


Figura 1.22

Desta forma, o plano fica subdividido em 4 quadrantes:

$$1^\circ \text{ quadrante: } Q_{+,+} = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$$

$$2^\circ \text{ quadrante: } Q_{-,+} = \{(x, y) \mid x < 0, y > 0\}$$

$$3^\circ \text{ quadrante: } Q_{-,-} = \{(x, y) \mid x < 0, y < 0\}$$

$$4^\circ \text{ quadrante: } Q_{+,-} = \{(x, y) \mid x > 0, y < 0\}$$

De acordo com o Teorema de Pitágoras, a distância do ponto $P = (x_p, y_p)$ à origem O (medida do segmento \overline{OP}) é

$$|OP| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}.$$

Assim, a cada ponto $P = (x_p, y_p)$ associamos o número real $|P| = |OP|$, denominado o módulo de P . Também associamos a P o ângulo θ_p formado pela semi-reta \vec{l}_{op} e o eixo- x , o qual também denominamos de inclinação da semi-reta \vec{l}_{op} em relação ao eixo- x . É claro, para qualquer ponto $Q \in \vec{l}_{op}$, $Q \neq P$, temos $|Q| \neq |P|$ e $\theta_q = \theta_p$. Resumindo, a cada ponto $P \in \mathbb{R}^2$ associamos

$$P = (|P|, \theta_p). \quad (1.33)$$

Por abuso de linguagem, θ_p corresponde ao ângulo e à sua medida.

Radianos

O círculo de raio R centrado na origem, que denotamos por $C = (O, R)$, é o conjunto dos pontos do plano \mathbb{R}^2 que equidistam R da origem O ;

$$C(O, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}.$$

Equivalentemente, $C(O, R) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |P| = R\}$. Dois pontos $P_1, P_2 \in C(O, R)$ dividem o círculo em dois arcos (figura 1.23). Observamos que é confuso descrever os arcos, pois sobre o círculo não há uma posição entre os pontos; na reta é mais fácil, porque temos o conceito de estarmos à esquerda ou à direita de um ponto.

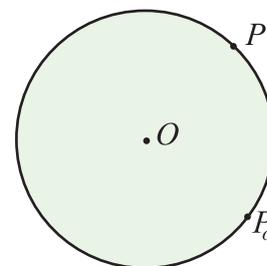


Figura 1.23

Para resolvermos esta situação sobre um círculo, fixamos uma orientação: dizemos que um ponto $P \in C(O, R)$ desloca-se no sentido positivo sobre $C = (O, R)$ se o deslocamento realiza-se no sentido anti-horário, caso contrário, dizemos que P desloca-se no sentido negativo (figura 1.24). Desta forma, ao representarmos um

arco na forma $\widehat{P_oP}$, estamos dizendo que o arco começou no ponto P_o e, ao deslocar-se no sentido anti-horário, termina em P .

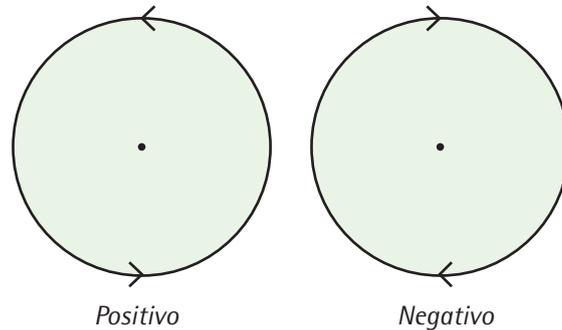


Figura 1.24

Estudaremos no capítulo 3 vários dos mistérios deste famoso número, o π .

O comprimento do círculo $C = (O, R)$ é $C = 2\pi R$. É muito antigo o conhecimento de que a razão $\frac{C}{2R}$ é uma constante, ou seja, não depende do comprimento do raio. Com base neste fato, os gregos introduziram uma forma muito eficiente para medirmos um ângulo seguindo os seguintes passos:

Chamado também
ângulo central.

- 1) Fixamos o ponto $P_o = (R, O)$ sobre o *eixo-x*. Cada ponto $P = (x_p, y_p)$ determina um único ângulo θ_p , formado pela semi-reta \vec{l}_{op} e o *eixo-x*; e também determina o arco orientado $\widehat{P_oP} \subset C(O, R)$ cujo comprimento denotamos por $|P_oP|$. Desta forma,

$$P = P_o \Rightarrow \theta_p = 0, \quad |P_oP| = 0.$$

- 2) Ao deslocarmos o ponto P no sentido positivo (anti-horário), o ângulo θ_p cresce e o comprimento do arco descrito também cresce. Se o deslocamento for no sentido negativo (horário), assumiremos que o ângulo decresce e o comprimento também decresce. Isso significa que ao fixarmos $P_o = (R, O)$ como o ponto de partida, como mostra a figura 1.25, teremos ângulos positivos e negativos. À $\widehat{P_oP}$ associaremos um número real C_p , de valor positivo se o deslocamento for no sentido positivo e de valor negativo se o deslocamento for no sentido negativo (θ_p e C_p terão o mesmo sinal), tal que

$$|C_p| = |P_oP|.$$

Se o ponto P desloca-se a partir de $P_o = (R, 0)$, sobre $C = (O, R)$, no sentido positivo até $(0, R)$, a distância percorrida pelo ponto P é igual a $\frac{1}{4}$ da circunferência de $C = (O, R)$ que equivale a $\frac{\pi}{2}R$; portanto, $C_p = \frac{\pi}{2}R$. Se o deslocamento for no sentido negativo até o ponto $(0, -R)$, então $C_p = -\frac{\pi}{2}R$.

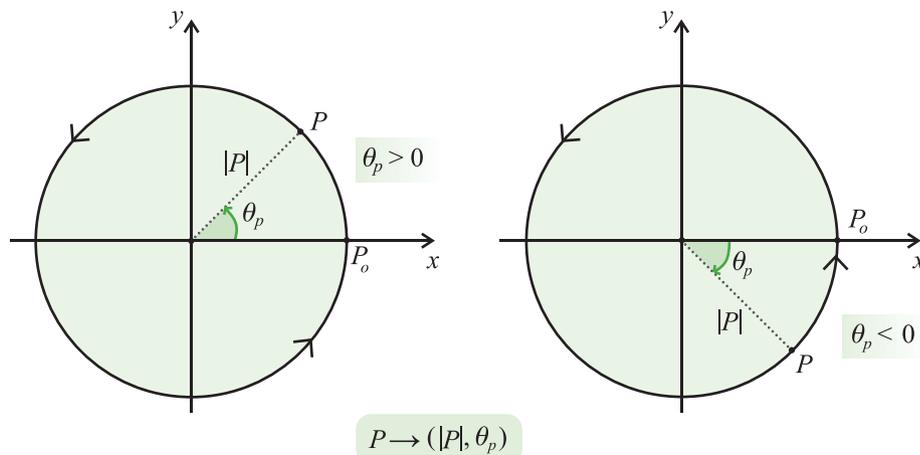


Figura 1.25a

- 3) Para determinarmos C_p , quando o ângulo central do arco $\widehat{P_oP}$ é medido em graus, digamos a° , utilizamos a fórmula:

$$C_p = 2\pi R \frac{a}{360}.$$

Desta forma, a razão $\frac{C_p}{R}$ depende apenas da medida a° do ângulo, independe do raio R e é adimensional. Isto motiva a definição da medida θ_p do ângulo central $P_o\hat{O}P$:

$$\theta_p = \frac{C_p}{R}. \quad (1.34)$$

- 4) Decorre da definição dada que $C_p = R \cdot \theta_p$. A unidade básica para medirmos ângulos através da expressão (1.34) é denominada *radiano*. Quando $C_p = R$ temos que $\theta_p = 1$ *radiano*, ou seja, $1 \text{ rad} \sim 57^\circ 30'$. Para convertermos a medida de um ângulo de *graus* para *radianos* utilizamos a fórmula

$$a^\circ \rightarrow x = 2\pi \frac{a}{360} \text{ radianos}. \quad (1.35)$$

Uma alternativa ao uso desta fórmula pode ser a utilização de regra de três.

- 5) Uma vez que a medida de um ângulo em radianos não depende do raio do círculo, é mais simples considerarmos o ponto P pertencente ao círculo unitário

$$S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}. \tag{1.36}$$

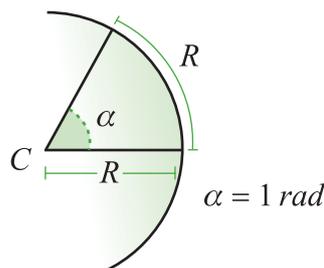


Figura 1.25b

Um ângulo de 1 radiano corresponde ao arco de circunferência de comprimento igual ao raio do círculo.

Lista de Exercícios 9

- 1) Complete a tabela abaixo e marque os ângulos sobre um círculo de raio $R = 10\text{cm}$:

Você acha que o raio interfere em seus resultados? Tente calcular a medida dos mesmos ângulos em radianos para um círculo de $R = 15\text{cm}$.

grau	30	45	60	90	120	135	150	180
radiano	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$					
grau	210	225	240	270	300	315	330	360
radiano								

Tabela 1.2

Não estamos mais restritos a ângulos medindo entre 0° e 360° , a todo número real θ podemos associar um ângulo medindo θ . No que segue, as medidas dos ângulos serão sempre em *radianos*, salvo dito em contrário.

1.2.3 Funções trigonométricas

Motivados pelas definições sobre triângulos retângulos, temos a seguinte definição:

Definição 1.8. Seja $P = (x_p, y_p) \in S^1$ e θ_p o ângulo associado à P em (1.33), então

$$\cos(\theta_p) = x_p, \quad \text{sen}(\theta_p) = y_p. \quad (1.37)$$

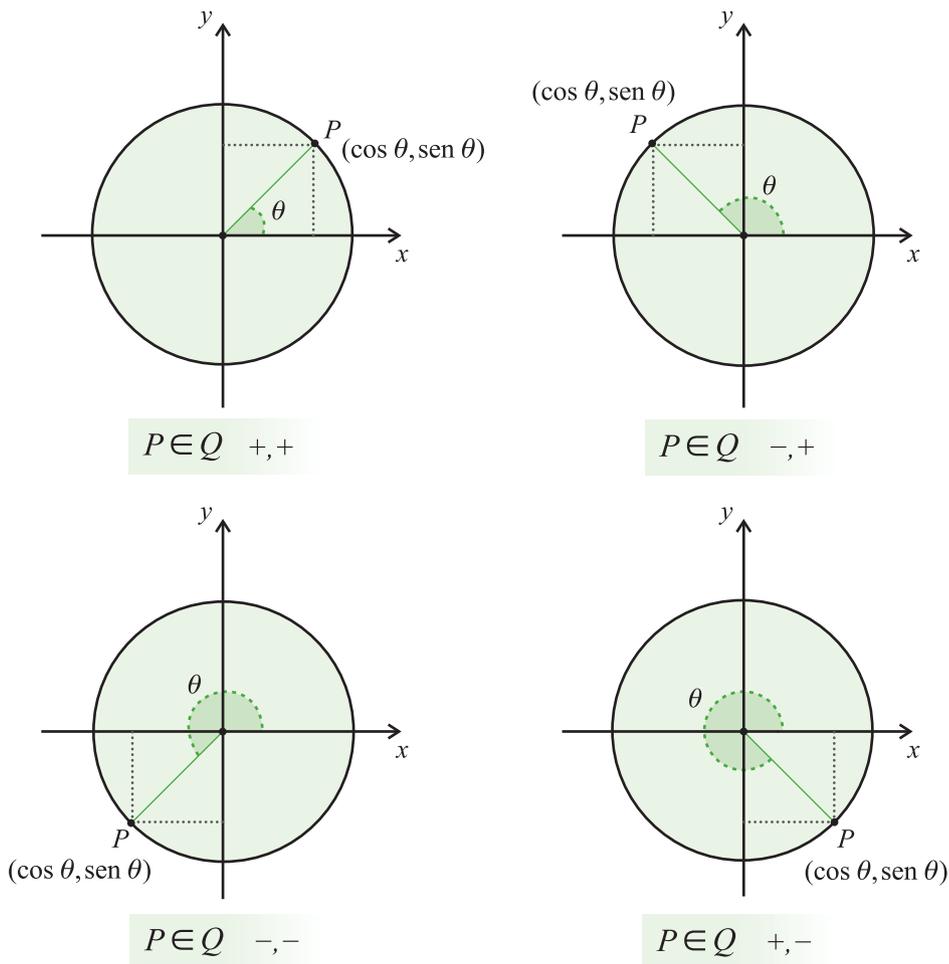


Figura 1.26

Observação. Na definição acima, observamos que;

- 1) Associado a cada ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$ há um único ponto $P = (x_p, y_p) \in S^1$.
- 2) θ_p é a inclinação da semi-reta \vec{l}_{op} relativa ao eixo- x .

3) Sejam $P_x = (x_p, 0)$ e $P_y = (0, y_p)$. O triângulo $\Delta OP_x P$ é retângulo $\left(\hat{P}_x = \frac{\pi}{2}\right)$ e $\hat{O} = \theta_p$. Desta maneira, as definições do seno e do cosseno de θ_p , dadas na seção 1.2.1, coincidem com as definições na seção 1.2.2.

4) $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

5) Os valores de $\cos(\theta_p)$ e $\sin(\theta_p)$ podem assumir valores positivos e negativos (figura 1.26), dependendo do valor das abscissas e das ordenadas do ponto P .

6) Com o que observamos no item 1, se $P \notin S^1$, então

$$\sin(\theta_p) = \frac{y_p}{|P|}, \quad \cos(\theta_p) = \frac{x_p}{|P|} \quad \text{e} \quad |P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}. \quad (1.38)$$

Lista de Exercícios 10

1) Complete a tabela abaixo (use um transferidor e um papel milimetrado).

θ	10°	20°	40°	50°	70°	80°
$\cos(\theta)$						
$\sin(\theta)$						
$\text{tg}(\theta)$						

Tabela 1.3

2) Estude o sinal de $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$ de acordo com a posição de P em cada um dos quadrantes.

3) Complete as tabelas abaixo:

θ	100°	110°	130°	150°	160°	170°
$\cos(\theta)$						
$\sin(\theta)$						
$\text{tg}(\theta)$						

Tabela 1.4

θ	-10°	-20°	-40°	-50°	-70°	-80°
$\cos(\theta)$						
$\text{sen}(\theta)$						
$\text{tg}(\theta)$						

Tabela 1.5

θ	-100°	-110°	-130°	-150°	-160°	-170°
$\cos(\theta)$						
$\text{sen}(\theta)$						
$\text{tg}(\theta)$						

Tabela 1.6

- Qual o valor máximo para o cosseno de um ângulo? E o mínimo?
- Repita o item anterior para o seno e para a tangente.

Proposição 1.9. Seja $\theta \in [0, 2\pi]$. Então,

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta), \quad \text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta).$$

Demonstração. É suficiente considerarmos os seguintes casos:

$$1) \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Sejam $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$, $x_p > 0$ e $x_q > 0$, os pontos sobre o círculo unitário associados aos ângulos θ e $-\theta$, respectivamente, conforme mostra a figura 1.27. Ao considerarmos $A = (x_p, 0)$ e $B = (x_q, 0)$, os triângulos retângulos $\triangle OPA$ e $\triangle OPB$ são congruentes (LAL). Portanto, $|OA| = |OB| = x_p$, de onde $A = B$, e $|PA| = |QB| = y_p$. Porém, B está sobre o lado negativo do eixo- y , por isto $x_q = x_p$ e $y_q = -y_p$. Conseqüentemente,

$$\cos(-\theta) = x_p = \cos(\theta), \quad \text{sen}(-\theta) = -y_p = -\text{sen}(\theta).$$

$$2) \theta \in [\pi, 2\pi].$$

Este caso fica como exercício para você. Qualquer dúvida, converse com seu tutor.

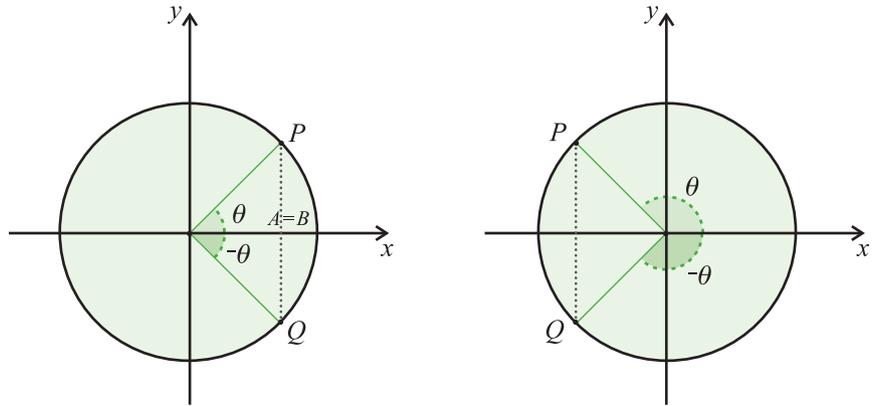


Figura 1.27

Lista de Exercícios 11

Determine os valores do *seno* e do *coosseno* dos ângulos abaixo e, em cada item, enuncie alguma conclusão sobre a relação entre os valores encontrados:

1) Prove o segundo caso da proposição anterior.

2) $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

3) $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

4) $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

5) $\theta = \frac{\pi}{10}$, $\theta = \frac{9\pi}{10}$.

Neste caso, dizemos que α e β são ângulos suplementares.

Proposição 1.10. Se $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\alpha + \beta = \pi$, então

$$\cos(\beta) = -\cos(\alpha), \quad \text{sen}(\beta) = \text{sen}(\alpha). \quad (1.39)$$

Demonstração. Há duas situações a serem consideradas:

1) P está no 1º quadrante.

Sejam $P = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$ o ponto sobre o círculo unitário associado ao ângulo α e $P' = (\cos(\alpha), 0)$, conforme mostra a figura 1.28. Ao traçarmos por P a reta r paralela ao eixo- x , a interseção de r com o círculo unitário define o ponto $Q = (x_q, y_q)$.

Seja $Q' = (x_q, 0)$; os triângulos retângulos $\Delta OP'P$ e $\Delta OQ'Q$ são congruentes (LAL) implicando que o ângulo central associado ao ponto Q mede β . Por isto, temos que $x_q = -\cos(\alpha)$ e $y_q = \sin(\alpha)$ e, conseqüentemente,

$$\cos(\beta) = -\cos(\alpha), \quad \sin(\beta) = \sin(\alpha).$$

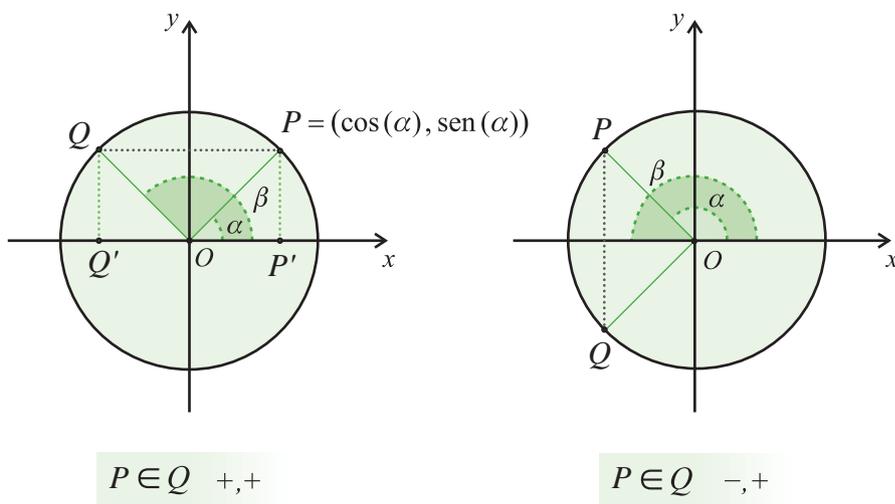


Figura 1.28

2) P está no 2º quadrante. (exercício)

■

A proposição acima nos permite calcular $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$ para qualquer ângulo $\theta \in [0, \pi]$.

Lista de Exercícios 12

- 1) Prove o segundo caso na proposição anterior.
- 2) Calcule o *coseno* e o *seno* dos seguintes ângulos e compare os resultados obtidos:
 - a) 30° e 330° .
 - b) 60° e 300° .
 - c) 45° e 315° .
 - d) 18° e 342° .
- 3) Mostre que se $\beta = 2\pi - \alpha$, então

$$\cos(\beta) = \cos(\alpha), \quad \sin(\beta) = -\sin(\alpha). \quad (1.40)$$

- 4) Determine $\cos(\pi + \theta)$ e $\sin(\pi + \theta)$.
- 5) Seja $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Suponha que os valores de $\cos(\theta)$ e de $\sin(\theta)$ são conhecidos e determine os seguintes valores (marque-os sobre o círculo unitário):
- $\cos(\pi + \theta)$ e $\sin(\pi - \theta)$.
 - $\cos(\theta - \pi)$ e $\sin(\theta - \pi)$.
 - $\cos(2\pi - \theta)$ e $\sin(2\pi - \theta)$.

Decorre do exercício anterior que, para qualquer ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$, os valores de $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$ estão determinados por valores de pontos correspondentes no 1º quadrante. Isto é:

- se $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (2º quadrante),
o ângulo correspondente é $\pi - \theta$,
- se $\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ (3º quadrante),
o ângulo correspondente é $\theta - \pi$,
- se $\theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ (4º quadrante), o ângulo correspondente é $2\pi - \theta$.

Uma vez que a cada $\theta \in \mathbb{R}$ associamos os valores $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$, de fato, o que temos são funções.

Definição 1.11. Seja $x \in \mathbb{R}$. Temos assim funções trigonométricas:

- a função cosseno definida pela relação $\theta \rightarrow \cos(\theta)$; da onde $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$.
- a função seno definida pela relação $\theta \rightarrow \sin(\theta)$; da onde $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$.

Decorre das igualdades $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ e $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ que as funções $\cos(x)$ e $\sin(x)$ são periódicas de período 2π . Da mesma maneira, temos funções:

- *tangente*: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \operatorname{tg}(x)$,
- *cotangente*: $x \in (0, \pi) \rightarrow \operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$,
- *secante*: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \operatorname{sec}(x) = \frac{1}{\cos(x)}$,
- *cossecante*: $x \in (0, \pi) \rightarrow \operatorname{cossec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$.

Os domínios das funções definidas acima podem ser estendidos para intervalos maiores, porém é preciso ter cuidado porque elas não estão definidas para quaisquer valores reais; por exemplo, o maior domínio para a função tangente, uma vez que $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ não está definido, é

$$\operatorname{tg} : \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$$

Exemplo. Estudaremos neste exemplo a função seno:

- 1) O seu domínio é \mathbb{R} .
- 2) O $\operatorname{sen}(x)$ é positivo nos quadrantes 1º e 2º, e negativo nos quadrantes 3º e 4º.
- 3) No intervalo, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ a função $\operatorname{sen}(x)$ é crescente. Para verificarmos a afirmação, consideramos $P_0 = (1, 0)$, $P = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$ e $Q = (\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ os pontos sobre S^1 correspondentes aos ângulos α e β . Além disto, também consideramos os pontos $P_y = (0, \operatorname{sen}(\alpha))$ e $Q_y = (0, \operatorname{sen}(\beta))$. Suponhamos que $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\beta > \alpha$. Lembrando que quando dois segmentos oblíquos a uma reta (eixo-y) são congruentes ($OP = OQ$), o que tem projeção ortogonal maior é o segmento que forma o menor ângulo com a reta (figura 1.29), temos

$$PP_x < QQ_x \Rightarrow \frac{PP_x}{OP} < \frac{QQ_x}{OQ} \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) < \operatorname{sen}(\beta),$$

o que mostra que o seno é uma função crescente.

Domínio

Se uma função associa valores de x com valores de y , seu domínio é o conjunto dos possíveis valores da variável x . (Fonte: IMENES, L. M. P.; LELLIS, M. C. *Microdicionário de Matemática*. São Paulo: Scipione, 1998.)

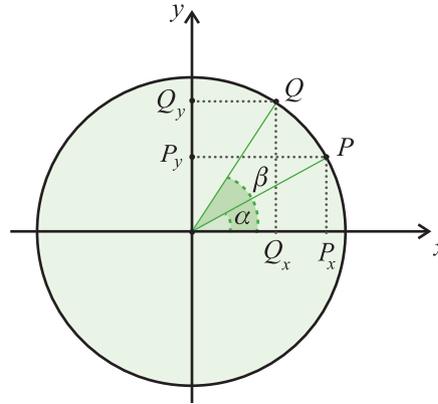


Figura 1.29

Portanto,

Intervalo	sen (x)	cos (x)	tg (x)	cotg (x)	sec (x)	cossec (x)
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	+, crescente					
$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	+, decrescente					
$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	-, decrescente					
$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	-, crescente					

Tabela 1.7

Imagem

Se os valores de y são funções de x , o conjunto dos valores de y é chamado de *imagem da função*. (Fonte: IMENES, L. M. P.; LELLIS, M. C. *Microdicionário de Matemática*. São Paulo: Scipione, 1998.)

- 4) Sua **imagem** é o intervalo $[-1,1]$.
- 5) O gráfico da função seno está representado na figura 1.30,

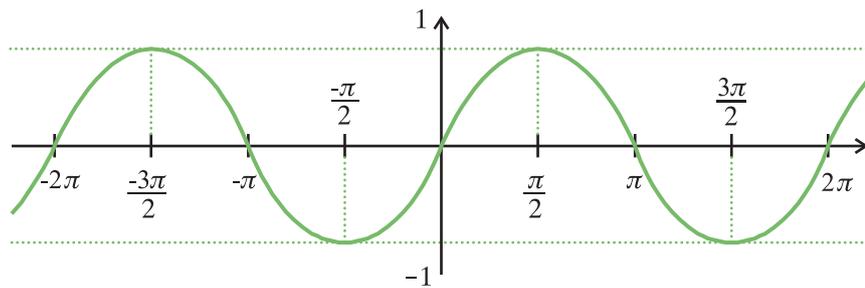


Figura 1.30

Lista de Exercícios 13

- 1) Complete a tabela acima, estudando a variação das funções trigonométricas e o sinal em cada um dos quadrantes.
- 2) Determine os conjuntos dos valores reais para os quais as funções $\cotg(x)$, $\sec(x)$ e $\operatorname{cosec}(x)$ estão definidas, as respectivas imagens e os períodos.
- 3) Determine os conjuntos dos valores reais para os quais as funções $\operatorname{sen}(3x)$ e $\operatorname{cos}(3x)$ estão definidas, as respectivas imagens e os períodos. Faça o gráfico das funções.

1.2.4 Lei dos Cossenos e dos Senos

Tendo em vista o caso (LAL) de congruência, resolveremos a seguinte questão:

Questão 1. Seja $\triangle ABC$ um triângulo cujos lados \overline{AC} e \overline{AB} medem b e c , respectivamente, e cujo ângulo \hat{A} formado entre eles mede α . Determine a medida do lado \overline{BC} .

Aplicaremos os conceitos introduzidos para obtermos relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo qualquer. Para procedermos, há dois casos para considerarmos sobre o triângulo $\triangle ABC$: (1) quando é acutângulo, (2) quando é obtusângulo.

Inicialmente, consideramos o caso quando $\triangle ABC$ é acutângulo. Conforme a figura (1.31), ao traçarmos a altura relativa ao lado \overline{AB} obtemos os triângulos retângulos $\triangle AHC$ e $\triangle HBC$.

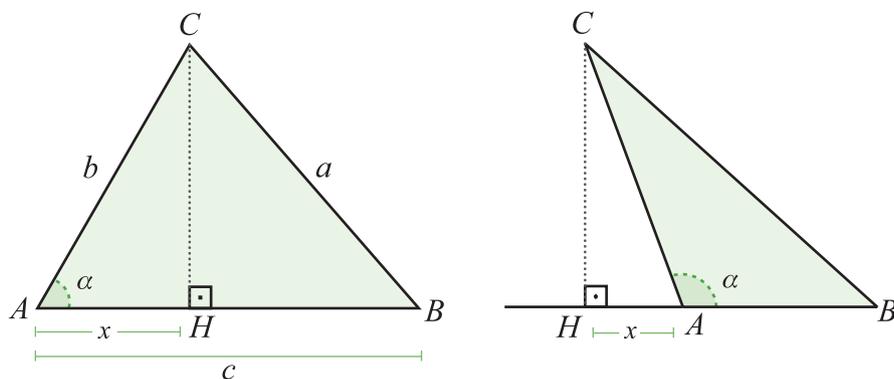


Figura 1.31

Ao fazermos $x = AH$ e $h = CH$, obtemos as seguintes relações:

$$\Delta AHC \Rightarrow b^2 = h^2 + x^2, \quad x = b \cos(\alpha), \quad (1.41)$$

$$\Delta HBC \Rightarrow a^2 = h^2 + (c - x)^2. \quad (1.42)$$

Ao expandirmos a expressão (1.42) e substituirmos os valores de x e x^2 obtidos em (1.41), obtemos a identidade, conhecida como *Lei dos Cossenos*.

Lei dos Cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha). \quad (1.43)$$

De maneira análoga, segue que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta), \quad (1.44)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma). \quad (1.45)$$

Observação. Se o triângulo ΔABC é retângulo em A , a expressão da lei dos cossenos é igual a expressão do Teorema de Pitágoras. No entanto, você deve estar ciente de que a Lei dos Cossenos é consequência do Teorema de Pitágoras e não o contrário.

De acordo com a expressão (1.43), no triângulo ΔABC temos

$$\cos^2(\alpha) = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}.$$

Segue da identidade fundamental 1.30 que

$$\sin^2(\alpha) = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}{4b^2c^2}$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{\sin^2(\alpha)}{a^2} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}{4a^2b^2c^2}.$$

Observamos que o lado direito da expressão acima,

$$k(a, b, c) = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}{4a^2b^2c^2},$$

é invariante por uma permutação dos valores de a , b , e c . Portanto, se em vez de termos usado o ângulo α e o comprimento a tivéssemos usado os pares β e b ou γ e c , teríamos obtido o mesmo resultado $k(a, b, c)$. Desta maneira, obtemos a *Lei dos Senos*:

Lei dos Senos:

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\text{sen}(\beta)}{b} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{c}. \quad (1.46)$$

Lista de Exercícios 14

- 1) Demonstre as expressões (1.44) e (1.45).
- 2) Mostre que a Lei dos Cossenos também vale para triângulos obtusângulos.
- 3) Num triângulo ΔABC qualquer, mostre que valem as seguintes desigualdades triangulares;

$$a < b + c,$$

$$b < a + c,$$

$$c < a + b.$$

- 4) Mostre, assim como na demonstração da *Lei dos Senos*, que

$$\frac{\text{sen}^2(\beta)}{b^2} = \frac{\text{sen}^2(\gamma)}{c^2} = k(a, b, c). \quad (1.47)$$

- 5) A área de um triângulo ΔABC é definida pela expressão

$$A = \frac{1}{2}(\text{base}) \times (\text{altura}),$$

onde (*base*) corresponde ao comprimento de um lado, e (*altura*) a medida da altura relativa a essa base. Siga os seguintes passos para obter uma outra demonstração da *Lei dos Senos*:

- a) Considere um triângulo ΔABC e verifique que a área é dada por

$$A = \frac{1}{2}c \cdot b \cdot \text{sen}(\alpha),$$

onde $b \cdot \text{sen}(\alpha)$ é a altura relativa ao lado \overline{AB} .

- b) Multiplique a expressão da área por a para obter a expressão

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{a} = \frac{2A}{abc}.$$

- c) Repita os itens anteriores, considerando a expressão para a área em função de β , c e a .
- d) Repita os itens anteriores, considerando a expressão para a área em função de γ , b e a .
- e) Compare os resultados e conclua que vale a *Lei dos Senos*.

- 6) Prove que a área do triângulo ΔABC de lados medindo a , b e c é dada pela expressão

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}. \quad (1.48)$$

- 7) Mostre, usando a *Lei dos Senos*, que um triângulo é isósceles se, e somente se, ele tiver dois ângulos iguais.
- 8) Mostre que num ΔABC , temos as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} a^2 < b^2 + c^2 &\Rightarrow \alpha \text{ é agudo,} \\ a^2 = b^2 + c^2 &\Rightarrow \alpha \text{ é retângulo,} \\ a^2 > b^2 + c^2 &\Rightarrow \alpha \text{ é obtuso.} \end{aligned}$$

- 9) Um observador examina a extremidade superior de uma torre sob um ângulo α . Quando ele se aproxima 110 m o ângulo duplica e quando se aproxima mais 50 m , triplica. Calcule a altura da torre.

1.2.5 Aplicação: Círculos Circunscritos a Triângulos

Eqüidistantes

O prefixo *eqüi* indica igualdade. Pontos ou retas que estão a uma mesma distância em relação a alguma referência são *eqüidistantes*. (Fonte: IMENES, L. M. P.; LELLIS, M. C. *Microdicionário de Matemática*. São Paulo: Scipione, 1998.)

Um círculo é dito ser circunscrito a um triângulo ΔABC se o seu centro **eqüidista** dos vértices A , B e C ; neste caso, seu raio é igual a distância dos vértices. Qualquer triângulo ΔABC admite um único círculo circunscrito, pois o centro é a interseção da mediatriz do segmento \overline{AB} com a mediatriz do segmento \overline{AC} (figura 1.32).

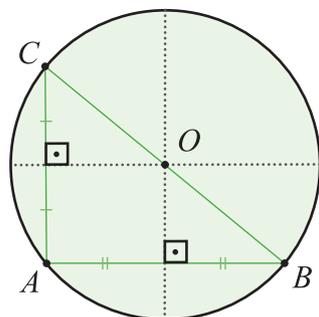


Figura 1.32

Uma vez que é fácil determinar o centro do círculo circunscrito, precisamos calcular seu raio. Primeiramente, vamos relembrar alguns fatos:

Definição 1.12.

- 1) Um ângulo é *central* em relação a um círculo se o seu vértice coincide com o centro do círculo (figura 1.33.a).
- 2) Um ângulo é *inscrito* num círculo se o seu vértice é um ponto do círculo e cada um de seus lados contém uma **corda** dessa circunferência (figura 1.33.b).

Corda é qualquer segmento de reta cujos extremos são pontos de uma circunferência, totalmente contido no círculo por ela delimitado. As cordas que contêm o centro da circunferência são chamadas diâmetros.

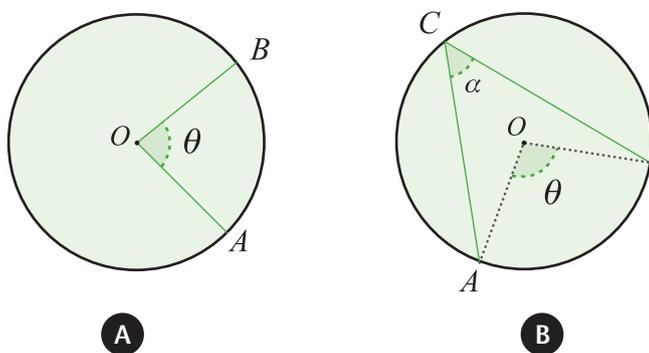


Figura 1.33

Proposição 1.13. Na figura (1.33.b) vemos que a cada ângulo inscrito \hat{ACB} corresponde um ângulo central \hat{AOB} , definido pelas extremidades do ângulo. As medidas $|\hat{ACB}| = \alpha$ e $|\hat{AOB}| = \theta$ satisfazem a relação:

$$\theta = 2\alpha. \quad (1.49)$$

Para demonstrarmos a expressão 1.49 consideraremos três casos:

- 1) Um dos segmentos que definem o ângulo inscrito \widehat{ACB} , digamos \overline{CB} , define um diâmetro do círculo (figura 1.34a).

Demonstração. Ao traçarmos o raio \overline{OA} , obtemos o triângulo isósceles $\triangle AOC$. Assim, $\widehat{OAC} = \widehat{ACB} = \alpha$ e $\theta = \widehat{AOB} = 2\alpha$ porque é a medida do ângulo externo.

- 2) O centro O do círculo encontra-se dentro do ângulo \widehat{ACB} (figura 1.34b)

Demonstração. Ao traçarmos o diâmetro \overline{CD} o ângulo \widehat{ACB} fica dividido em dois ângulos inscritos, medindo α_1 e α_2 ($\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$) e $\theta = \widehat{AOD} + \widehat{DOB}$. Como cada um dos ângulos inscritos tem um lado passando pelo centro, podemos aplicar o caso anterior para concluirmos que $\widehat{AOD} = 2\alpha_1$ e $\widehat{DOB} = 2\alpha_2$. Conseqüentemente, $\theta = 2\alpha$.

- 3) O centro O do círculo encontra-se fora do ângulo \widehat{ACB} (figura 1.34c)

Demonstração. Ao traçarmos o diâmetro \overline{CD} , desta vez por fora do ângulo, o ângulo \widehat{ACD} fica dividido em dois ângulos inscritos medindo α_1 e α_2 ($\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$) e $\theta = \widehat{AOD} - \widehat{BOD}$. Como cada um dos ângulos inscritos tem um lado passando pelo centro, podemos aplicar o caso anterior para concluirmos que $\widehat{AOD} = 2\alpha_1$ e $\widehat{BOD} = 2\alpha_2$. Conseqüentemente, $\theta = 2\alpha$.

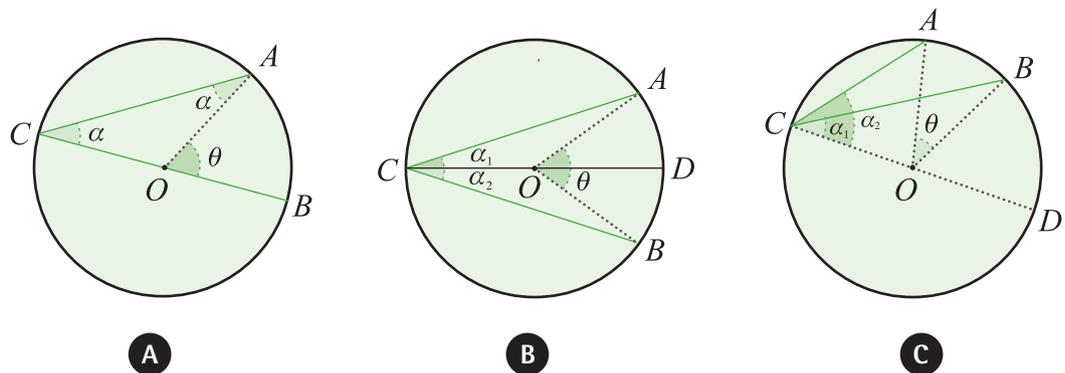


Figura 1.34

Proposição 1.14. Num ΔABC qualquer o raio R do círculo circunscrito é dado por

$$2R = \frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)}. \quad (1.50)$$

Demonstração. No círculo circunscrito à ΔABC traçamos o diâmetro BA' (figura 1.35).

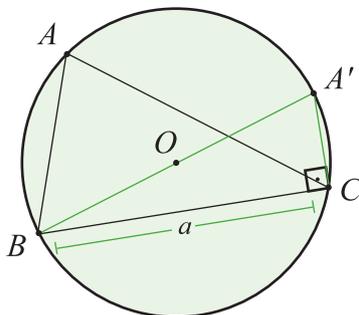


Figura 1.35

Decorre da relação (1.49) que podemos construir um triângulo retângulo $\Delta BCA'$, inscrito tal que $\hat{C} = \frac{\pi}{2}$. Além disto, decorre que $\hat{A}' = \hat{A}$. Seja R o raio do círculo circunscrito, então,

$$a = R \text{sen}(A') \Rightarrow a = R \text{sen}(A) \Rightarrow 2R = \frac{a}{\text{sen}(A)}.$$

A relação 1.50 segue aplicando a lei dos senos. ■

Você é capaz de dizer por que esta afirmação é verdadeira?

Lista de Exercícios 15

- 1) Seja R o raio do círculo circunscrito ao triângulo ΔABC e A a sua área. Se a , b e c são as medidas dos lados do ΔABC , mostre que

$$A = \frac{abc}{4R}. \quad (1.51)$$

- 2) No triângulo ΔABC , o lado \overline{BC} tem comprimento igual ao raio do círculo circunscrito ao triângulo. Determine o ângulo \hat{BAC} .

Não se esqueça de usar desenhos, para facilitar sua visualização e a consequente resolução dos exercícios!

- 3) O ΔABC é retângulo em A . Determine a medida do ângulo formado pela altura e pela mediana, ambas relativas a hipotenusa, sabendo que $\hat{C} = 20^\circ$.
- 4) Num triângulo isósceles, a base e a altura correspondente têm o mesmo comprimento b . Calcule o raio do círculo circunscrito a esse triângulo.
- 5) Na figura 1.36, os pontos A e C são pontos de interseção das circunferências e \overline{AB} e \overline{AD} são diâmetros das mesmas. Prove que B , C e D são pontos alinhados.

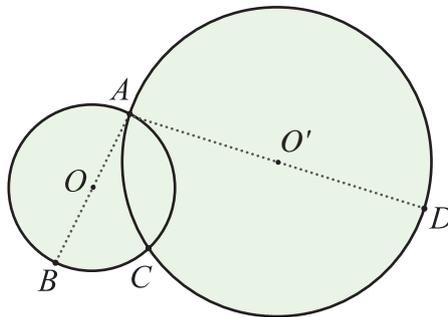


Figura 1.36

- 6) Calcule o raio do círculo circunscrito a um triângulo sabendo que um lado mede $a = 2m$ e o ângulo oposto mede 15° .
- 7) Dado um triângulo ΔABC , existe um único círculo circunscrito a ele. Conclua que a recíproca desta afirmação é falsa. Dê exemplos.
- 8) Sejam R , r os raios dos círculos, circunscrito e inscrito a um triângulo ΔABC , e d a distância entre os centros desses círculos. Mostre que $d^2 = R^2 - 2Rr$.
- 9) Prove que se o quadrilátero $ABCD$ é inscritível então a soma dos ângulos opostos é igual a π .

1.2.6 Identidades Trigonômicas

As funções trigonométricas satisfazem identidades que tornam mais eficientes suas aplicações. A seguinte questão é fundamental para desenvolvermos ainda mais o conteúdo de Trigonometria:

Questão. Seja $\theta = \beta + \gamma$ e suponhamos que o seno e o cosseno dos ângulos β e γ são conhecidos. Estes dados determinam $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$?

Soma de Arcos: $\cos(x \pm y)$, $\sin(x \pm y)$

Nesta seção, resolveremos a questão acima. A distância entre os pontos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$ é dada pela expressão

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}. \quad (1.52)$$

Essa expressão para a fórmula da distância, resulta do Teorema de Pitágoras (figura 1.37).

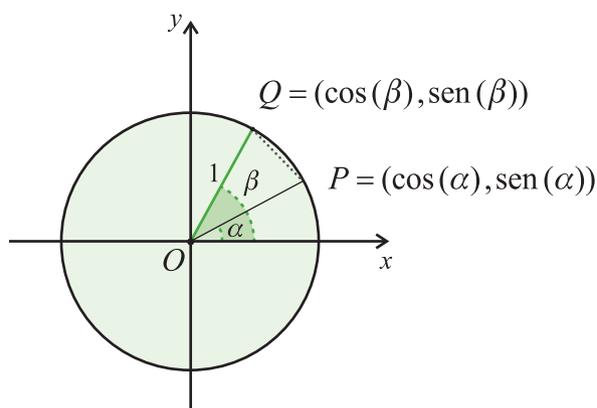


Figura 1.37

A expressão 1.52 será utilizada para obtermos a identidade

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta), \quad (1.53)$$

conhecida como a fórmula do *cosseno da diferença*, fundamental para o desenvolvimento e para as aplicações da trigonometria. Conforme mostra a figura 1.37, sejam $P, Q \in S^1$ e sejam α e β os ângulos associados a cada um dos pontos, respectivamente; isto é,

$$P = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)), \quad Q = (\cos(\beta), \sin(\beta)).$$

Ao considerarmos o triângulo ΔOPQ , segue que o comprimento do lado \overline{PQ} é igual a distância d de P à Q , isto é,

$$d^2 = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 = (\cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 + (\sin(\alpha) - \sin(\beta))^2$$

$$d^2 = 2 - 2[\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)]. \quad (1.54)$$

Ao aplicarmos a *Lei dos Cossenos* (1.43) ao triângulo ΔOPQ , obtemos a relação:

$$d^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta). \quad (1.55)$$

Portanto, igualando as expressões 1.54 e 1.55:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Se existe uma expressão para determinarmos o cosseno da diferença de ângulos, devemos nos perguntar se também existe uma expressão para determinarmos o cosseno da soma de ângulos, assim como também para o seno da soma e da diferença, e para a tangente da soma e da diferença. Para respondermos esta indagação precisamos apenas saber que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ e aplicarmos a identidade 1.53, como mostramos a seguir:

$$1) \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \quad (1.56)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos(\alpha)\cos(-\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$

■

$$2) \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \quad (1.57)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right] = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(\beta) = \\ &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$

■

$$3) \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \quad (1.58)$$

Demonstração. (Exercício)

■

Lista de Exercícios 16

1) Mostre que

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}, \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}. \quad (1.59)$$

2) Calcule o seno, o cosseno e a tangente de $(105^\circ = 60^\circ + 45^\circ)$.

3) Se $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{3}{5}$ e $\operatorname{sen}(\beta) = \frac{12}{13}$, calcule $\cos(\alpha + \beta)$.

4) Mostre que

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1, \quad \operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$$

5) Calcule o seno, o cosseno e a tangente de 15° .

6) Verifique a identidade

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}}.$$

7) Se $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{3}$, calcule $\operatorname{sen}(3\theta)$ e $\cos(3\theta)$.

8) Calcule $\cos(x^4)$ em função de $\cos(x)$.

9) Os lados de um triângulo ΔABC medem $a = 4, b = 5$ e $c = 6$.
Mostre que $\hat{C} = 2\hat{A}$.

10) Mostre que num triângulo não retângulo ΔABC vale a identidade

$$\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta) + \operatorname{tg}(\gamma) = \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)\operatorname{tg}(\gamma).$$

11) Mostre as fórmulas da bissetção:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

12) Num triângulo ΔABC qualquer, seja $2p = a + b + c$ (p é o semiperímetro). Mostre que valem as identidades abaixo:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right) &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{aligned} \quad (1.61)$$

(Dica: a lei dos cossenos implica em $1 - \cos(\alpha) = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$ e $1 + \cos(\alpha) = \frac{p(p-a)}{bc}$; a seguir use a expressão 1.60).

Fórmulas para $\operatorname{sen}(x) \pm \operatorname{sen}(y)$, $\operatorname{cos}(x) \pm \operatorname{cos}(y)$

As fórmulas abaixo decorrem das expressões para o cosseno e para o seno da soma e da diferença de ângulos. Elas são úteis quando precisamos calcular a soma ou a diferença dos valores do seno ou do cosseno, transformando-as em produto de funções trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\operatorname{cos}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right), \quad (1.62)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{cos}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right), \quad (1.63)$$

$$\operatorname{cos}(\alpha) + \operatorname{cos}(\beta) = 2\operatorname{cos}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\operatorname{cos}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right), \quad (1.64)$$

$$\operatorname{cos}(\alpha) - \operatorname{cos}(\beta) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right). \quad (1.65)$$

Verificaremos a identidade 1.64, as outras são verificadas de maneira análoga. Ao somarmos as identidades abaixo,

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \text{ e}$$

$$\operatorname{cos}(\alpha - \beta) = \operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

obtemos

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) + \operatorname{cos}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta). \quad (1.66)$$

Agora, ao considerarmos o sistema

$$\alpha + \beta = \theta,$$

$$\alpha - \beta = \gamma,$$

segue que $\alpha = \frac{\theta + \gamma}{2}$ e $\beta = \frac{\theta - \gamma}{2}$. Substituindo os valores de α e β em 1.66, segue que

$$\cos(\theta) + \cos(\gamma) = 2\cos\left(\frac{\theta + \gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta - \gamma}{2}\right).$$

Lista de Exercícios 17

Escreva as expressões abaixo como produto de funções trigonométricas:

- 1) $\cos(x) + \cos(y)$.
- 2) $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y)$.
- 3) $1 + \operatorname{sen}(2x)$.
- 4) $\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(3x)$. Estenda para $\sum_{i=1}^n \operatorname{sen}(ix)$.
- 5) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(7x)$. Estenda para $\sum_{i=1}^n \cos(ix)$.
- 6) Mostre que num triângulo $\triangle ABC$, com ângulos internos α, β, γ valem as seguintes identidades:
 - a) $\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\gamma) = 4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.
 - b) $\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) = 1 + 4\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.
 - c) $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\beta) + \operatorname{sen}^2(\gamma) = 4\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\gamma)$.
 - d) $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)$.
- 7) Estude o comportamento das seguintes funções:
 - a) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{\sqrt{2}}$.
 - b) $f(x) = \frac{\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{2}}$.

1.2.7 Aplicação: Círculo Inscrito a um Triângulo

Vimos que num triângulo ΔABC há um círculo circunscrito. Agora analisaremos a existência de um círculo inscrito a ΔABC .

Definição 1.15. Dizemos que um círculo C está inscrito a um triângulo ΔABC quando os lados do triângulo são tangentes ao círculo.

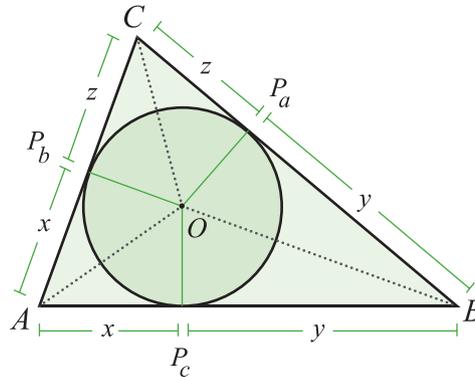


Figura 1.38

Conforme ilustra a figura 1.38, se o círculo inscrito centrado em O tem raio r , então $OP_a = OP_b = OP_c = r$ e $\overline{OP_a} \perp \overline{BC}$ e $\overline{OP_b} \perp \overline{AC}$ e $\overline{OP_c} \perp \overline{AB}$. Nosso objetivo é determinarmos r , para isto, enunciaremos algumas proposições auxiliares:

Proposição 1.16. Os seguintes triângulos da figura 1.38 são congruentes:

- 1) $\Delta AOP_c \cong \Delta AOP_b$
- 2) $\Delta BOP_c \cong \Delta BOP_a$.
- 3) $\Delta COP_b \cong \Delta COP_a$.

Demonstração. Apresentaremos a demonstração para o caso 1, os outros seguem analogamente. Para demonstrarmos que $\Delta AOP_c \cong \Delta AOP_b$ é suficiente observarmos que

- a) $OP_b = OP_c = r$,
- b) os triângulos sendo retângulos implicam em

$$(AP_b)^2 = (OA)^2 - r^2 = (AP_c)^2.$$

A congruência decorre do caso *LAL*.

Corolário 1.17. O centro do círculo inscrito coincide com o incentro do triângulo.

Demonstração. A congruência entre os triângulos $\Delta AOP_c \cong \Delta AOP_b$ implica que $\widehat{P_bAO} = \widehat{OAP_c}$ e, por conseguinte, o segmento \overline{AO} está sobre a bissetriz do ângulo \hat{A} . Analogamente, \overline{BO} e \overline{CO} estão sobre a bissetriz, de onde concluímos que O é o ponto de interseção das 3 bissetrizes do triângulo. ■

Consideramos $x = P_bA = AP_c$, $y = P_cB = BP_a$ e $z = P_aC = CP_b$; ou seja, temos o sistema linear

$$\begin{aligned}x + y &= c, \\x + z &= b, \\y + z &= a.\end{aligned}$$

Cujas soluções são:

$$x = \frac{b+c-a}{2} = p-a, \quad y = \frac{a+c-b}{2} = p-b, \quad z = \frac{a+b-c}{2} = p-c, \quad (1.67)$$

onde $2p = a+b+c$. Para procedermos ao cálculo do raio r , observamos o seguinte (figura 1.39):

$$1) \quad OA = \frac{r}{\text{sen}(\alpha/2)} \qquad 2) \quad (OA)^2 = (p-a)^2 + r^2.$$

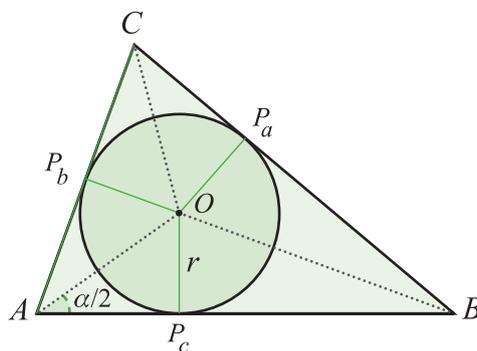


Figura 1.39

Assim, $r = (p-a) \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Portanto, ao aplicarmos a expressão 1.61, segue que

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \quad (1.68)$$

Teorema 1.18. Qualquer triângulo ΔABC admite um único círculo inscrito com centro sobre o incentro e raio dado pela expressão 1.68.

Lista de Exercícios 18

- 1) Seja R o raio do círculo circunscrito e r o raio do círculo inscrito ao triângulo ΔABC . Mostre que

$$Rr = \frac{abc}{4p},$$

onde $2p = a + b + c$ (p é o semi-perímetro).

1.2.8 Secante, Cossecante e Cotangente

Em algumas situações, é pertinente considerarmos os valores inversos do cosseno, do seno e da tangente de um ângulo.

Definição 1.19. Seja $\theta \in \mathbb{R}$.

- 1) A secante de θ é

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

- 2) A cossecante de θ é

$$\operatorname{cossec}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}.$$

- 3) A cotangente de θ é

$$\operatorname{cotg}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)}.$$

Cada um destes valores tem uma interpretação geométrica:

- 1) **Tangente**

- a) $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (figura 1.40).

Sejam $\Delta OP'P$ o triângulo retângulo onde $P = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$, $P' = (\cos(\theta), 0)$ e $P_0 = (1, 0)$. Consideramos ΔOP_0Q o triângulo retângulo semelhante à $\Delta OP'P$ ($\overline{P_0Q}$ é paralelo à $\overline{P'P}$).

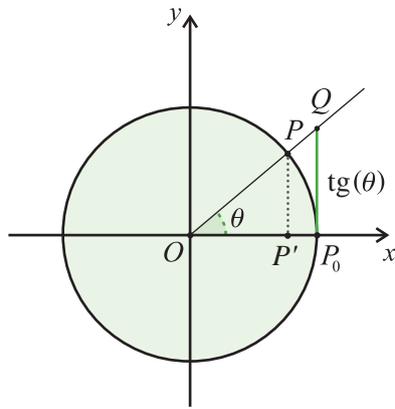


Figura 1.40

Decorre da semelhança que

$$P_0Q = \frac{P'P}{OP'} = \operatorname{tg}(\theta).$$

b) $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ (exercício)

2) Cotangente

a) $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ (figura 1.41).

Seja $\triangle OPP''$ o triângulo retângulo onde $P'' = (0, \operatorname{sen}(\theta))$ e $P_1 = (0, 1)$. Consideramos $\triangle OQP_1$ o triângulo retângulo semelhante à $\triangle OPP''$ (P_1Q é paralelo à $P''P$).

Decorre da semelhança que

$$P_1Q = \frac{P''P}{OP''} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \operatorname{cotg}(\theta).$$

b) $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ (exercício)

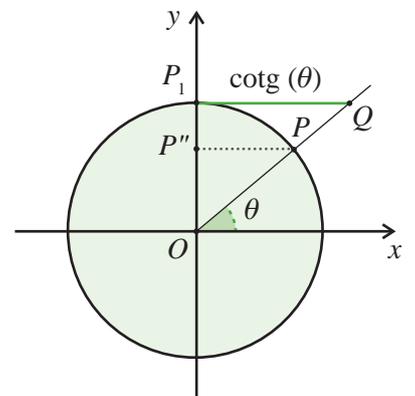


Figura 1.41

3) Secante

a) $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ (figura 1.42).

Seja $\triangle OP'P$ o triângulo retângulo onde $P = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$ e $P'' = (\cos(\theta), 0)$. Consideramos $\triangle OPQ$ o triângulo retângulo

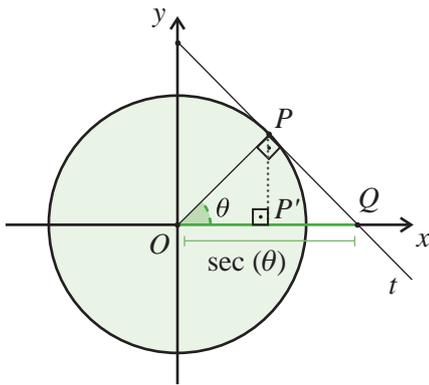


Figura 1.42

semelhante à $\Delta OP'P$ construído assim: seja t a reta tangente à S^1 passando por P e Q o ponto na interseção de t com o eixo- x .

Decorre da semelhança de triângulos que

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{OP}{OP'} \Rightarrow OQ = \sec(\theta).$$

b) $\theta \in \left[\pi, \frac{\pi}{2} \right]$ (exercício)

4) Cossecante

a) $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ (figura 1.43).

Seja $\Delta OP''P$ o triângulo retângulo onde $P = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ e $P'' = (0, \sin(\theta))$. Consideramos $\Delta OPQ'$ o triângulo retângulo semelhante à $\Delta OP''P$ construído assim: seja t a reta tangente à S^1 passando por P e Q' o ponto na interseção de t com o eixo- y .

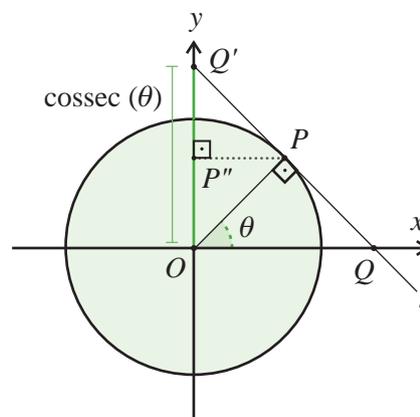


Figura 1.43

Decorre da semelhança de triângulos que

$$\frac{OQ'}{OP} = \frac{OP}{OP''} \Rightarrow OQ' = \text{cossec}(\theta).$$

c) $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ (exercício)

As seguintes identidades decorrem da identidade fundamental:

$$\sec^2(\theta) = 1 + \operatorname{tg}^2(\theta), \quad (1.69)$$

$$\operatorname{cosec}^2(\theta) = 1 + \operatorname{cotg}^2(\theta). \quad (1.70)$$

Lista de Exercícios 19

- 1) Prove as identidades 1.69 e 1.70.

1.2.9 Equações Trigonométricas

Para resolvermos equações trigonométricas muitas vezes temos que obter o valor de uma das funções trigonométricas e, só então, calcular o valor de x . Vejamos alguns exemplos de equações trigonométricas:

- 1) Determine o valor de x sabendo que $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Já sabemos que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e também que $\cos(-x) = \cos(x)$.

Portanto, $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = -\frac{\pi}{3}$ são soluções da equação. No entanto, como $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, concluímos que a solução da equação é $x_n = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

- 2) Determine o valor de $x \in \left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$ sabendo que $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (eq. Fundamental).

De maneira análoga ao item anterior, sabendo que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e que $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$, temos que a solução geral é

$x_n = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, onde uma solução corresponde a um ângulo no 1º quadrante e o outro no 2º quadrante. No entanto, devido a restrição $x \in \left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$ temos que a solução procurada encontra-se no 1º quadrante, de onde concluímos que é $x = \frac{9\pi}{4}$.

3) Encontre x tal que $\cos(3x) = \cos(x)$.

Existem duas possibilidades:

a) $3x = x + 2\pi n \Rightarrow 2x = 2\pi n \Rightarrow x = \pi n$,

b) $3x = -x + 2\pi n \Rightarrow 4x = 2\pi n \Rightarrow x = \frac{\pi n}{2}$.

4) Encontre x tal que $\cos(3x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Novamente, existem duas possibilidades:

a) $3x = 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$,

b) $3x = -\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$.

5) Quais são os ângulos $\theta \in [0, 2\pi]$ tais que o seu seno é igual ao seno do seu dobro?

Chamemos de x os ângulos procurados, então:

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = x + 2\pi k \\ 2x = \pi - x + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2\pi k \\ x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$$

Agora, basta ver para que valores de $k \in \mathbb{N}$ temos $x \in [0, 2\pi]$. De acordo com a tabela abaixo:

k	0	1	2	3
x_1	0	2π	4π	6π
x_2	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$

Tabela 1.8

Portanto o conjunto solução é $\left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.

6) Encontre $x \in \mathbb{R}$ tal que $2\cos^2(x) = 1 - \sin(x)$.

$$2(1 - \sin^2(x)) = 1 - \sin(x) \Rightarrow 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0.$$

Resolvendo, temos $\sin(x) = 1$ ou $\sin(x) = -\frac{1}{2}$. Estas últimas são equações fundamentais e admitem as seguintes soluções, para cada $k \in \mathbb{Z}$:

$$\sin(x) = 1 \Rightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_k = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \text{ ou } \frac{11\pi}{6} + 2\pi k.$$

7) Encontre $x \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = 1$.

Ao substituírmos $u = \cos(x)$ e $v = \sin(x)$, obtemos o par de equações

$$\sqrt{3}u + v = 1, \quad (1.71)$$

$$u^2 + v^2 = 1. \quad (1.72)$$

Ao substituírmos $v = 1 - \sqrt{3}u$ na equação 1.72 temos

$$4u^2 - 2\sqrt{3}u = 0 \Rightarrow 2u[2u - \sqrt{3}] = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Então,

$$u = 0 \Rightarrow v = 1 \Rightarrow \cos(x) = 0, \sin(x) = 1 \Rightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi,$$

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_k = -\frac{\pi}{6} + 2\pi.$$

Uma outra forma de resolver a equação seria proceder assim:

$$\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \right] = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right),$$

na qual a última igualdade decorre da fórmula do seno da soma de arcos.

Portanto, a equação é equivalente a equação

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}.$$

Lista de Exercícios 20

Em cada item, encontre $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça a igualdade.

- 1) $4 \cos(x) + 3 \operatorname{sen}(x) = 5$.
- 2) $2 \operatorname{sen}^2(x) + 6 \cos(x) - \cos(2x) = 5$.
- 3) $\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 1$.
- 4) $\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x) = 0$.
- 5) $\operatorname{sen}(x) + \cos(3x) - \cos(5x) + \operatorname{sen}(7x) = 0$.
- 6) $\operatorname{sen}^4(x) + \cos^4(x) = \frac{3}{4}$.
- 7) $\sqrt{3} \operatorname{sen}(x) + \cos(x) = \sqrt{3}$.

Desafios

- 1) Mostre que $\operatorname{sen}(10^\circ)$ satisfaz a equação $8x^3 - 6x + 1 = 0$.
- 2) Prove que $\operatorname{sen}(10^\circ)$ é irracional.
- 3) Mostre que se $\cos(2\theta)$ é irracional, então $\cos(\theta)$, $\operatorname{sen}(\theta)$, $\operatorname{tg}(\theta)$ também serão irracionais.

1.2.10 Resolução de Triângulos

Como dissemos anteriormente, resolver um triângulo significa determinar o comprimento de todos os lados, a medida dos ângulos internos e a área. Existem quatro casos de congruência de triângulos (1) *LAL*, (2) *LLL*, (3) *ALA*. Portanto, para resolvermos um triângulo, um dos casos de congruência deve ser atendido.

1) Caso LAL

São conhecidos dois lados b , c e o ângulo formado por eles α . Precisamos determinar os valores de a, β, γ e A :

- Lei dos Cossenos $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$,
- Lei dos Cossenos $\Rightarrow \cos(\beta) = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}$,

- Lei dos Senos $\Rightarrow \text{sen}(\gamma) = \frac{\text{sen}(\alpha) \cdot c}{a}$,
- $A = \frac{bc}{2} \text{sen}(\alpha)$.

Como qualquer ângulo de um triângulo é menor que 180° , as medidas obtidas são únicas.

2) Caso LLL

São conhecidos os lados a, b, c . Precisamos determinar os valores de α, β, γ e A :

- Lei dos Cossenos $\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$,
- Lei dos Cossenos $\Rightarrow \cos(\beta) = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}$,
- $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$,
- $A = \frac{bc}{2} \text{sen}(\alpha)$.

3) Caso ALA

São conhecidas a medida a do lado \overline{BC} e as medidas β e γ dos ângulos adjacentes a \overline{BC} . Precisamos determinar os valores de b, c, α e A :

- $\alpha = 180^\circ - (\gamma + \beta)$,
- Lei dos Senos $b = a \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\alpha)}$,
- Lei dos Cossenos $\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$,
- $A = \frac{bc}{2} \text{sen}(\alpha)$.

Lista de Exercícios 21

- 1) Discuta a unicidade do triângulo obtido para cada um dos casos de resolução apresentados acima, uma vez que ao determinarmos o valor do seno sempre há duas possibilidades para o valor do ângulo.

Topografia

Topografia é a ciência que estuda todos os acidentes geográficos definindo a situação e a localização de uma área em geral. Tem a importância de definir as medidas de área, locação, loteamento, variações de nível e cubagem de terra. (Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Topografia>)

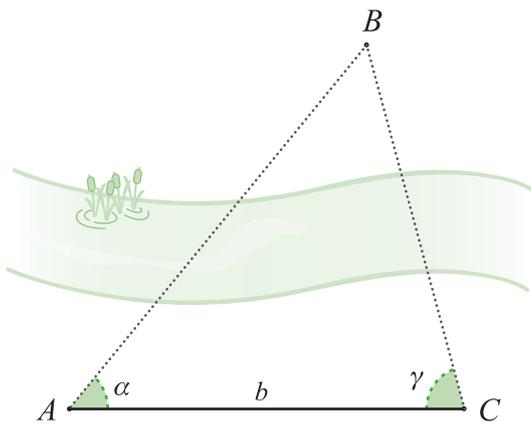


Figura 1.44

- 2) Determine em cada um dos casos apresentados de resolução, o raio dos círculos inscrito e circunscrito.

Aplicações

Nesta seção, apresentaremos algumas questões clássicas em **Topografia**:

Questão 1: Sejam A um ponto acessível e B um ponto inacessível. Determine a distância de A a B (figura 1.44).

Na região acessível, marcamos um ponto C de tal forma que a distância $AC = b$ é conhecida. Visando B de A e também de C , medimos os ângulos α e γ . Pela lei dos senos,

$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)}, \quad \beta = \pi - (\alpha + \gamma).$$

Portanto,

$$c = \frac{b \text{sen}(\gamma)}{\text{sen}(\alpha + \gamma)}.$$

Questão 2: Sejam A e B dois pontos inacessíveis e C um ponto acessível. Determine as distâncias AC e BC (figura 1.45).

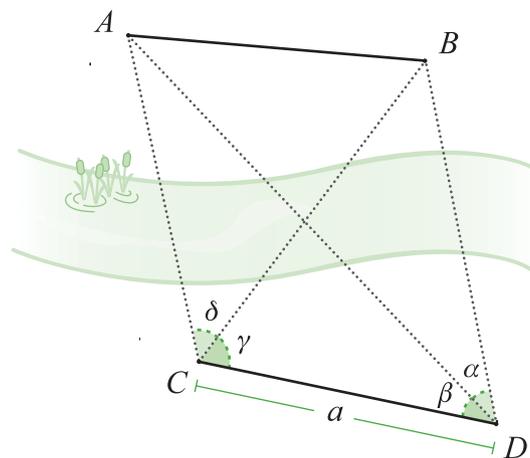


Figura 1.45

Na parte acessível ao observador, marcamos os pontos C e D de maneira que os pontos A e B sejam visíveis. Seja $CD = a$ e

$ABCD$ o quadrilátero obtido ao ligarmos os pontos. Visando os pontos A e B de C medimos os ângulos:

$$\widehat{ACB} = \delta, \widehat{BCD} = \gamma, \widehat{BCD} = \gamma, \widehat{ADB} = \alpha.$$

Nos triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle ACD$ conhecemos o lado $AC = a$ e os ângulos adjacentes. Aplicando a lei dos senos:

$$\triangle BCD \Rightarrow \frac{BC}{\text{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{CD}{\text{sen}[\pi - (\alpha + \beta + \gamma)]}$$

$$\Rightarrow BC = a \cdot \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen}(\alpha + \beta + \gamma)},$$

$$\triangle ACD \Rightarrow \frac{AC}{\text{sen}(\beta)} = \frac{CD}{\text{sen}[\pi - (\beta + \delta + \gamma)]}$$

$$\Rightarrow AC = a \cdot \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\beta + \delta + \gamma)}.$$

Questão 3: Suponha que uma estrada está sendo construída de A até D . Porém, ao chegar em B não é possível prolongar a estrada, devido a uma montanha, como ilustra a figura 1.46. Determine um método para prolongarmos a estrada a partir de C até D de maneira que os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} estejam sobre uma mesma reta.

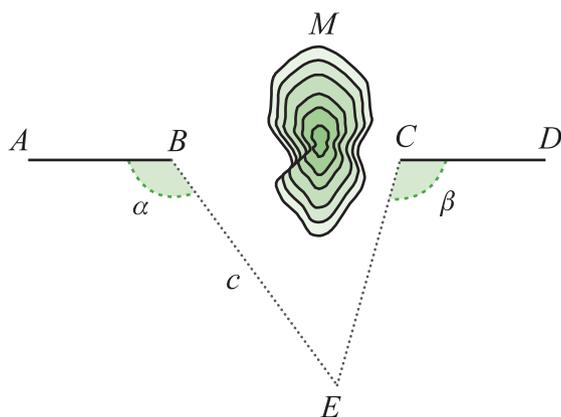


Figura 1.46

Suponhamos o problema resolvido e seja \overline{CD} o prolongamento de \overline{AB} . De um ponto E , de onde possamos ver a região além do obstáculo, avistamos as direções EB e EC . Medimos $BE = c$ e os ângulos $\widehat{ABE} = \alpha$ e $\widehat{BEC} = \hat{E}$. O triângulo $\triangle BCE$ fica determinado porque conhecemos um lado e os dois ângulos adjacentes.

Podemos determinar EC e o ângulo $D\hat{C}E = \beta$:

$$\beta = \hat{E} + (\pi - \alpha) = \pi - \alpha + \hat{E}.$$

Aplicando a Lei dos Senos,

$$\frac{EC}{\text{sen}(\pi - \alpha)} = \frac{EB}{\text{sen}(\alpha - \hat{E})} \Rightarrow EC = \frac{c \cdot \text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\alpha - \hat{E})}.$$

Para terminar, marcamos o ponto C usando o valor calculado de EC e estendemos uma linha após marcarmos o ângulo β a partir do segmento \overline{CE} .

Questão 4: Determine a altura de uma montanha (figura 1.47).

Sobre o plano da base da montanha e de onde podemos ver o cume V , nós marcamos os pontos A e B . Sejam $m = AB$, α e β os ângulos de \overline{AB} com as direções \overline{AV} e \overline{BV} , respectivamente, e θ o ângulo de \overline{AV} com a horizontal \overline{AC} .

No triângulo ΔABV , temos $A\hat{V}B = \gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ e

$$\frac{AB}{\text{sen}(\gamma)} = \frac{AV}{\text{sen}(\beta)} \Rightarrow AV = \frac{m \cdot \text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\alpha + \beta)}.$$

Agora, construímos o triângulo retângulo ΔACV , reto em C e com hipotenusa AV . Portanto,

$$VC = AV \text{sen}(\theta) = \frac{m \cdot \text{sen}(\beta) \text{sen}(\theta)}{\text{sen}(\alpha + \beta)}.$$

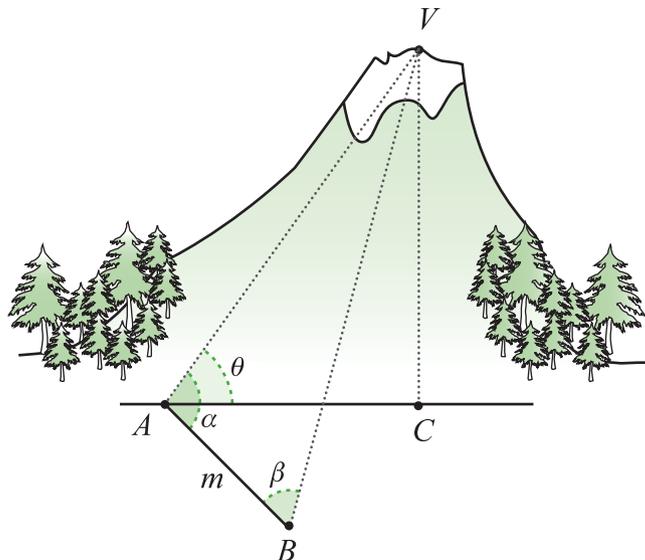


Figura 1.47

Questão 5: Considere que os pontos A, B e C são coplanares (figura 1.48). Determine a posição de um ponto D , no mesmo plano, de tal forma que os segmentos \overline{BC} e \overline{CA} sejam vistos sob ângulos α e β , respectivamente (figura 1.48).

Complanar

Pontos são coplanares quando estão em um mesmo plano.

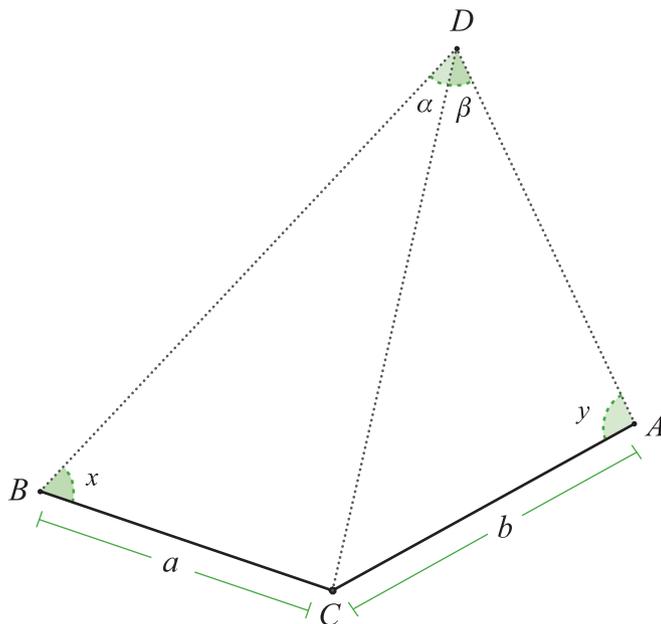


Figura 1.48

Os dados do problema são: a medida \hat{C} do ângulo $A\hat{C}B$, os comprimentos $a = BC$ e $b = AC$, e as medidas α e β , dos ângulos $B\hat{D}C$ e $C\hat{D}A$, respectivamente. Denotamos por x e y as medidas dos ângulos $C\hat{B}D$ e $D\hat{A}C$, respectivamente. Temos então que

$$x + y = 2\pi - (\alpha + \beta + \hat{C}). \quad (1.73)$$

Precisamos determinar o valor de $x - y$ para respondermos a questão. Nos triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle ACD$ temos

$$\frac{CD}{\text{sen}(x)} = \frac{a}{\text{sen}(\alpha)}, \quad \frac{CD}{\text{sen}(y)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)};$$

e, por conseguinte,

$$\frac{\text{sen}(x)}{\text{sen}(y)} = \frac{b \cdot \text{sen}(\alpha)}{a \cdot \text{sen}(\beta)}.$$

Chegamos então ao sistema

$$\frac{x + y}{2} = \pi - \frac{\alpha + \beta + \hat{C}}{2}, \quad (1.74)$$

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(y)} = \frac{b \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{a \cdot \operatorname{sen}(\beta)}. \quad (1.75)$$

Da equação 1.75 temos

$$\frac{\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y)}{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)} = \frac{b \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + a \cdot \operatorname{sen}(\beta)}{b \cdot \operatorname{sen}(\alpha) - a \cdot \operatorname{sen}(\beta)},$$

ou equivalentemente (ver equações 1.62 e 1.63),

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{b \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + a \cdot \operatorname{sen}(\beta)}{b \cdot \operatorname{sen}(\alpha) - a \cdot \operatorname{sen}(\beta)}. \quad (1.76)$$

Ao multiplicarmos e dividirmos pelo termo $a \cdot \operatorname{sen}(\beta)$ e também introduzirmos ϕ como solução de $\operatorname{tg}(\phi) = \frac{b \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{a \cdot \operatorname{sen}(\beta)}$, a expressão 1.76 torna-se

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}(\phi)+1}{\operatorname{tg}(\phi)-1} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}(\phi)-1}{\operatorname{tg}(\phi)+1} \operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right). \quad (1.77)$$

Substituindo $\frac{x+y}{2} = \pi - \frac{\alpha + \beta + \hat{C}}{2}$ na expressão acima, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right) &= \frac{\operatorname{tg}(\phi)-1}{\operatorname{tg}(\phi)+1} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha + \beta + \hat{C}}{2}\right) = \\ &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \phi\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha + \beta + \hat{C}}{2}\right). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Desta forma, determinamos o valor de $\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right)$. Como

$0 < x, y < \frac{\pi}{2}$, então também obtemos o valor de $\theta = \frac{x-y}{2}$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \pi - \frac{\alpha + \beta + \hat{C}}{2} \\ \frac{x-y}{2} = \theta \end{cases}$$

concluimos que

$$x = \pi - \frac{\alpha + \beta + \hat{C}}{2} + \theta, \quad y = \pi - \frac{\alpha + \beta + \hat{C}}{2} - \theta.$$

Observação final: É necessário analisarmos a expressão (1.78) porque, tratando-se de um produto, um deles pode anular-se; neste caso, o outro deverá ser finito para evitarmos uma indeterminação. O único fator que poderia ser infinito é $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha + \beta + \hat{C}}{2}\right)$, da onde teríamos $\frac{\alpha + \beta + \hat{C}}{2} = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\alpha + \beta + \hat{C} = \pi$. Se isto acontecer, o quadrilátero $ACBD$ da figura 1.48 é inscrito porque os ângulos opostos são suplementares; além disto, os círculos circunscritos aos triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle ACD$ coincidirão.

Como os diâmetros destes círculos são

$$2R = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)}, 2R = \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)},$$

teremos

$$a \cdot \operatorname{sen}(\beta) = b \cdot \operatorname{sen}(\alpha).$$

Sendo assim, $\operatorname{tg}(\phi) = \frac{b \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{a \cdot \operatorname{sen}(\beta)} = 1$ e, conseqüentemente

$\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \phi\right) = 0$. Sob esta conclusão, e somente nela,

haverá uma indeterminação porque a expressão 1.78 será $0 \cdot \infty$.

A interpretação geométrica para a indeterminação vem da observação que o quadrilátero $ACBD$ é inscrito (figura 1.49), qualquer ponto do arco BDA será uma solução do problema.

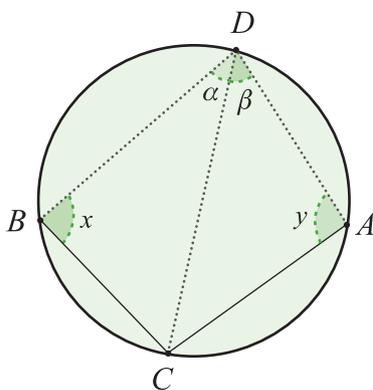


Figura 1.49

Lista de Exercícios 22

- 1) Na questão 5, justifique as fórmulas utilizadas e prove as afirmações feitas na observação final.

Capítulo 2

Número π

Capítulo 2

Número π

Neste capítulo será estudado o problema da quadratura do círculo, em seu desenvolvimento histórico, através do conhecimento sobre o número π .

No passado, não muito longínquo, não havia um símbolo para denotar a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro; em Latim dizia-se

“quantitas, in quaum cum multiplicetur diameter, proveniet circumferentia.”

Traduzindo a frase: “quantidade que, quando o diâmetro é multiplicado por ela, resulta a circunferência”. Em fórmula,

$$C = \pi(2R).$$

Se, nos dias de hoje, a Matemática não desfruta de popularidade entre nossos estudantes o que seria dela se, em vez de usarmos a notação simbólica e as fórmulas, tivéssemos que ensiná-la através de frases do tipo

“Multiplicatio medietatis diametri in se ejus, quod provenient in quantitatem, in quam cum multiplicatus diameter provenit circumferentia, aequalis superficies circuli”;

cuja tradução em notação matemática, significa que a área do círculo é

$$\left[\frac{d}{2} \times \frac{d}{2} \right] \times \pi = A.$$

A letra grega π (pi) foi introduzida no início do século XVIII, possivelmente por William Jones (1675-1749) (Beckman, 1971), na Inglaterra, para denotar a razão

$$\frac{C}{2R}.$$

Já muito antigamente, foi percebido que a razão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro era constante. Por exemplo, no Velho Testamento, nos livros I Reis (vii-23) e em 2 Crônicas (iv-2), há a seguinte citação:

Livro do Reis, vii-23: O Mar da Fundição – “[...] fez também o mar da fundição, redondo, de dez **côvados** de uma borda até a outra, de cinco de alto, e um fio de 30 côvados era a medida de sua circunferência.” (Hirão de Tiro, a serviço do rei Salomão)

No Egito antigo, o côvado era uma medida retirada da distância entre o cotovelo e as pontas dos dedos. Correspondia a dezoito polegadas (45,72 centímetros).

Ou seja,

$$\pi = \frac{30}{10} = 3.$$

O livro dos Reis foi editado pelos antigos judeus como texto religioso, por volta de 550 a.C., embora as suas fontes datem de vários séculos anteriores. Os babilônicos e os egípcios sabiam mais sobre π . Os babilônicos acharam, por volta de 2.000 a.C., o valor $\pi = 3 + \frac{1}{8}$ e os egípcios obtiveram $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$.

Portanto, levou uns 4.000 anos de desenvolvimento de técnicas matemáticas para compreendermos π : em 1766, Lambert mostrou que π é um número irracional, em 1844, **Johann Dase** (1824-1861) calculou π com 200 casas decimais corretas em menos de 2 meses e em 1882 Lindemann provou a transcendência de π . Citando o prefácio da 1ª edição de (Beckman, 1971):

Ele sofria da Síndrome de Savant (anteriormente designada “*idiot-savant*”). Esta síndrome é considerada um distúrbio psíquico com o qual a pessoa possui uma grande habilidade intelectual aliada a um déficit de inteligência.

“A história de π é um pitoresco espelho da história da nossa civilização. É a história de homens como Arquimedes de Siracusa, cujo método para calcular π resistiu a aperfeiçoamentos por cerca de 1900 anos; é também a história de um homem de negócios de Cleveland, que publicou um livro em 1931 anunciando a descoberta que π era exatamente igual a $\frac{256}{81}$, valor este que os egípcios usaram uns 4.000 anos antes. É a história da realização da Universidade de Alexandria no 3º século a.C.; e é também a história da loucura humana que botou fogo nas livrarias científicas porque condenavam os conteúdos como trabalhos do diabo.”

A expansão do conhecimento e o desenvolvimento das técnicas decorrem do ímpeto para enfrentarmos os desafios e para resolvermos os problemas. Muitas vezes, o problema em si não justifica tanta energia e investimento para solucioná-lo. Porém, da riqueza do processo derivam ideias e técnicas capazes de solucionar outras questões de relevância; esta é a riqueza da procura por soluções.

2.1 A Questão da Quadratura do Círculo

Refere-se a toda matemática produzida na Grécia Antiga.

Você já leu uma discussão sobre as construções deste tipo no tópico 3.1 da Geometria I. Se não se lembra, releia!

Atualmente, a Matemática utiliza-se de um sofisticado sistema simbólico para representar seus elementos e as suas estruturas. A **Matemática Helênica** baseava-se essencialmente na construção geométrica das quantidades com régua e compasso. Para isto, as regras eram as impostas pelos axiomas de Euclides e as suas conseqüências. Por exemplo, suponhamos que os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} medem a e b , respectivamente. A seguir, construiremos com régua e compasso algumas quantidades:

1) $a + b$

Prolongamos o segmento \overline{AB} . Com a abertura do compasso centrada em B , marcamos um ponto E de maneira que o segmento \overline{BE} seja congruente à \overline{CD} . Evidentemente, $AE = a + b$.

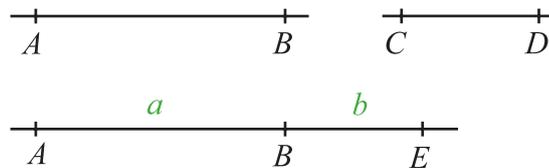


Figura 2.1

2) $a - b$ ($a > b$)

Sobre o segmento \overline{AB} marcamos o ponto E com o compasso centrado em A de maneira que o segmento \overline{AE} seja congruente à \overline{CD} . Então, $EB = a - b$.

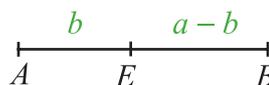


Figura 2.2

3) $\frac{p}{q}a$, onde $p, q \in \mathbb{N}$,

- construímos a semi-reta \vec{l}_{AB} , ($AB = a$);
- por A traçamos uma semi-reta \vec{l} (arbitrária);
- com o compasso tendo uma abertura medindo k , a partir de A , marcamos q pontos $C_1, \dots, C_q = C$ sobre \vec{l} ($AC_1 = C_1C_2 = \dots = C_{q-1}C_q = k$);
- ligamos os pontos B e C_q para construirmos o segmento $\overline{BC_q}$;
- por cada um dos pontos C_1, \dots, C_{q-1} traçamos uma reta paralela a $\overline{BC_q}$.

Sejam D_1, \dots, D_{q-1} os pontos obtidos quando as retas construídas encontram o segmento \overline{AB} .

Na figura 2.3, suponhamos que $AD_1 = x_1, \dots, D_{q-1}D_q = x_q$.

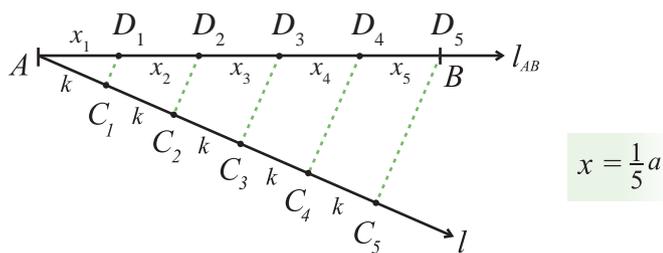


Figura 2.3

Pelo Teorema de Tales,

$$\frac{x_1}{k} = \dots = \frac{x_q}{k} \Rightarrow x_1 = \dots = x_q.$$

Além disto, fazendo $x = x_1$,

$$\frac{a}{kq} = \frac{x}{k} \Rightarrow x = \frac{a}{q}.$$

Para construirmos $\frac{p}{q}a$, basta colocarmos o compasso com a abertura medindo x e, a partir de A , marcarmos p vezes sobre a semi-reta \vec{l}_{AB} .

4) $\frac{a}{b}$

- construa uma semi-reta \vec{l} concorrente ao segmento \overline{AB} no ponto A ;
- sobre \vec{l} , construímos o segmento \overline{AD} congruente a \overline{CD} ;
- sobre o segmento \overline{AD} , marcamos o segmento \overline{AE} de comprimento 1;
- ligamos B com D e construímos o segmento \overline{EF} paralelo à \overline{BD} .

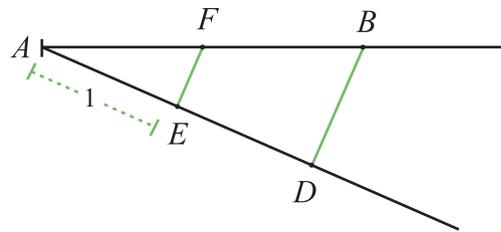


Figura 2.4

Pelo Teorema de Tales,

$$\frac{AF}{1} = \frac{a}{b}.$$

5) \sqrt{ab}

A construção é realizada seguindo os seguintes passos:

- construa o segmento \overline{AD} de comprimento $a + b$, conforme ilustra a figura 2.5;
- construa a semicircunferência com diâmetro \overline{AD} ;
- sobre o ponto B , construa a perpendicular ao segmento \overline{AD} e seja E o ponto de interseção com a semicircunferência;

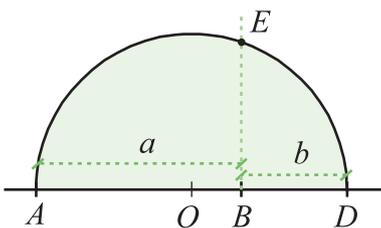


Figura 2.5

O triângulo $\triangle ADE$ é retângulo, então decorre da relação 1.3 (página 14), em que o quadrado da altura é igual ao produto da projeção dos catetos

$$BE^2 = ab \Rightarrow BE = \sqrt{ab}.$$

6) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$ (razão áurea).

- prolongue o segmento \overline{AB} e sobre ele construa o quadrado $ABCD$ de lado medindo a ;
- marque o ponto médio E de \overline{AB} ;
- centrado em E e com altura medindo \overline{ED} , marque o ponto F à esquerda de A ($\overline{EF} = \overline{ED}$);

Seja $x = \overline{AF}$; então

$$x = \left(a \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} \right) = a \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

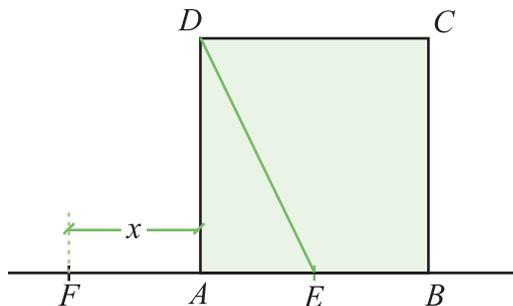


Figura 2.6

Os gregos formularam as questões da quadratura do círculo e a da retificação da circunferência e ambas perduraram até 1882, quando Lindemann provou que π é um número transcendente. Fixada uma circunferência ou círculo de raio R , a questão era construir um segmento medindo $R\sqrt{\pi}$ (quadratura) de maneira que o quadrado sobre ele construído tivesse área igual a πR^2 , ou construir um segmento de comprimento $2\pi R$ (retificação). As regras nunca foram muito claras, porém, pela história do problema, segundo Beckman (1971), compreendemos que eram as seguintes:

- Para construção do quadrado devem ser utilizados apenas régua e compasso,
- Para realizar a construção apenas um número finito de operações com régua e compasso são permitidas.

Alguns métodos que resolvem parcialmente a questão foram descobertos, mas violam o item (2). Os limites impostos são muito

restritivos uma vez que, a partir dos axiomas de Euclides, só é possível construir com um número finito de passos retas e circunferências. Hippias e Arquimedes desenvolveram métodos distintos, Hippias usou a curva quadratrix e Arquimedes usou uma espiral; ambas as curvas requerem um número infinito de passos para serem construídas com régua e compasso.

Vejamos alguns exemplos simples de construções com régua e compasso que, de maneira aproximada, ou retificam, ou resolvem a questão da quadratura:

- 1) Em 1685, A. A. Kochansky descobriu o seguinte método de retificação aproximada da circunferência; acompanhe a figura 2.7:
 - a) desenhe uma circunferência de raio R centrada em O ;
 - b) trace o diâmetro \overline{AB} ;
 - c) por A trace uma reta l_1 perpendicular ao diâmetro \overline{AB} e sobre l_1 , à direita de A , marque o ponto D a uma distância $3R$ de A ;
 - d) por B trace a reta l_2 paralela a l_1 e marque o ponto C , à direita de B , de maneira que $\widehat{B\hat{O}C}$ meça $\pi/6$;

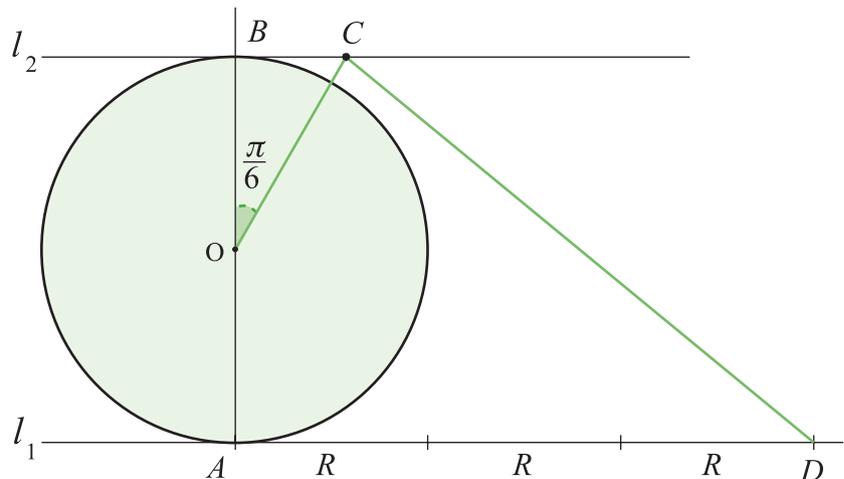


Figura 2.7

Segue da construção que $BC = R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Também temos que

$$CD^2 = AB^2 + (AD - BC)^2 = 4R^2 + \left(3R - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2 = R^2 \left(\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}\right).$$

De onde concluímos que $CD = 3,1415929 R$.

2) Jakob Gelder, em 1849, baseado na aproximação

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2} = 3 + 0,14159292,$$

construiu um segmento medindo $0,14159292$.

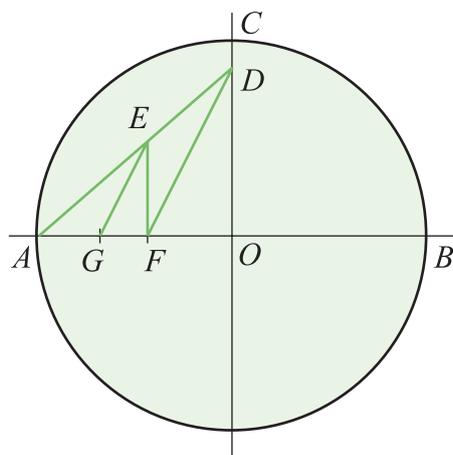


Figura 2.8

- trace uma circunferência de raio R e centro em O ;
- trace o diâmetro \overline{AB} ;
- por O levante uma perpendicular a \overline{AB} e marque o ponto C na interseção com a circunferência;
- sobre o segmento \overline{OC} marque o ponto D de maneira que $\overline{OD} = \frac{7}{8}R$;
- sobre o segmento \overline{AD} marque o ponto E de maneira que $\overline{AE} = \frac{R}{2}$;
- por E trace uma paralela à \overline{OC} encontrando \overline{AO} no ponto F ;
- trace os segmentos paralelos \overline{FD} e \overline{GE} ;

Determinaremos AG . Na figura existem dois casos de semelhança:

i) $\triangle AFE \sim \triangle AOD$,

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AO}{AD} \Rightarrow AF = \frac{4R}{\sqrt{7^2 + 8^2}}.$$

ii) $\triangle AGE \sim \triangle AFD$,

$$\frac{AG}{AE} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow AG = R \frac{4^2}{7^2 + 8^2} = R \cdot 0,14159292.$$

Portanto, $\pi \approx \frac{3 \cdot OA + AG}{R}$.

3) Em 1913, Hobson mostrou o seguinte método aproximado para a quadratura do círculo (figura 2.9):

a) sobre uma reta l marque o segmento \overline{AB} , medindo $AB = 2R$, o ponto médio O e trace a semicircunferência ACB no plano superior a l ;

b) marque o ponto D , entre A e O , de maneira que $OD = \frac{3}{5}R$;

c) marque o ponto E , entre O e B , de maneira que $OE = \frac{R}{2}$;

d) construa a semicircunferência, no plano superior a l , com diâmetro DE ;

e) marque o ponto F , à direita de B , de maneira que

$$OF = \frac{3}{2}R;$$

f) construa a semicircunferência, no plano inferior a l , com diâmetro AF ;

g) por O , construa a perpendicular a \overline{AB} . Sejam G e H os pontos de interseção com as semicircunferências, conforme indica a figura 2.9.

Ao considerarmos os triângulos retângulos $\triangle DGE$ e $\triangle AFH$ e aplicarmos a relação métrica $h^2 = mn$;

$$OG^2 = \frac{3}{10}R^2, \quad OH^2 = \frac{3}{2}R^2.$$

Você saberia justificar por que estes triângulos são necessariamente retângulos? Pense nisso.

Portanto,

$$OG + OH = \sqrt{3} \left[\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] R \sim 1,77246R.$$

Como $\sqrt{\pi} \sim 1,77245$, então $GH \sim \sqrt{\pi}R$ e o quadrado de lado GH tem área aproximadamente igual a πR^2 .

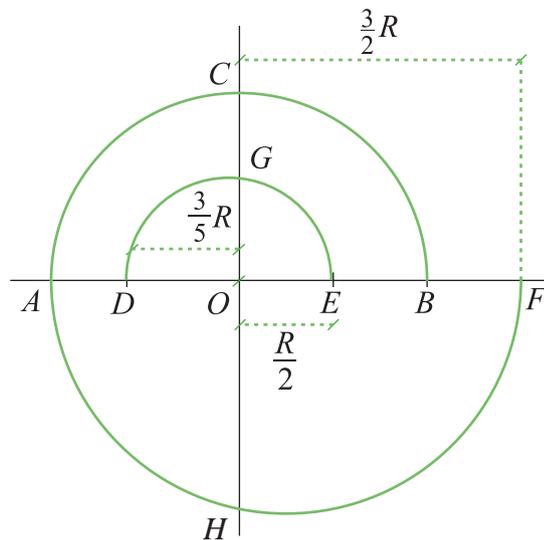


Figura 2.9

Os erros nos exemplos acima são da ordem de 10^{-5} .

Para darmos um tratamento matemático mais rigoroso a π , precisamos estudar os polígonos regulares.

2.2 Polígonos Regulares

Definição 2.1. Um polígono de n lados é regular se os lados são congruentes entre si e também os ângulos são congruentes entre si.

Notação. um polígono regular é denotado por P_n , seus vértices por A_1, \dots, A_n , o comprimento do seu lado por l_n , e a medida do ângulo interno por α_n .

Ao traçarmos as bissetrizes de cada ângulo interno verificamos que todas elas concorrem num mesmo ponto O equidistante dos vértices, o qual é o centro da circunferência circunscritível a P_n .

Proposição 2.2. Num polígono regular de n lados, cada ângulo interno mede

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \pi. \quad (2.1)$$

Demonstração. Ao se encontrarem no ponto O , as bissetrizes dividem P_n em triângulos $\Delta_i = \Delta OA_i A_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$ e $A_{n+1} = A_1$, que são isósceles e congruentes entre si. Sejam $\hat{\theta}_n$ a medida do ângulo no vértice O e x a medida dos ângulos da base em cada Δ_i ; ou seja $\hat{\theta}_n = \frac{2\pi}{n}$ e $\hat{\theta}_n + 2x = \pi$. Uma vez que $\alpha_n = 2x$, segue que $\alpha_n = \frac{n-2}{n} \pi$. ■

Desta forma, o interior do polígono regular de n lados pode ser decomposto em n triângulos isósceles e congruentes, com os ângulos internos medindo $\hat{\theta}_n = \frac{2\pi}{n}$ e $\hat{A}_k = \hat{A}_{k-1} = \frac{n-2}{2n} \pi$ (ângulos da base). Se o raio da circunferência na qual o polígono está inscrito mede R , então podemos calcular, em função de R e n a medida l_n da base do triângulo Δ_i , conforme ilustra figura 2.10.

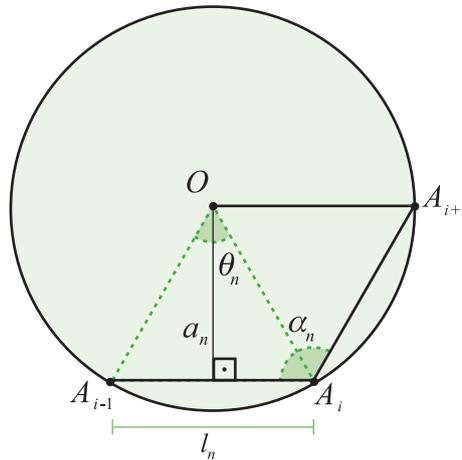


Figura 2.10

No triângulo $\Delta OA_{k-1} A_k$, a altura relativa à base é denominada o *apótema* do polígono P_n , cujo comprimento denotamos por a_n . As seguintes relações existem entre as medidas:

$$l_n = 2R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad a_n = R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad (2.2)$$

$$R^2 = \frac{l_n^2}{4} + a_n^2. \quad (2.3)$$

Além disto, o perímetro de P_n vale $p_n = nl_n$ e a área vale $s_n = n \frac{l_n a_n}{2}$.
Em termos do ângulo central,

$$p_n = 2nR \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad s_n = \frac{nR^2}{2} \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad (2.4)$$

Exemplo. Na tabela abaixo, encontram-se os valores do seno e do cosseno dos ângulos necessários para a descrição dos exemplos a seguir (como exercício, preencha as lacunas):

θ (rad)	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{8}$
$\cos(\theta)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	
$\text{sen}(\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	

Tabela 1

1) P_3 (triângulo eqüilátero).

Desde que $n = 3$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$l_3 = R\sqrt{3}, \quad a_3 = \frac{R}{2}, \quad p_3 = 3R\sqrt{3}, \quad s_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

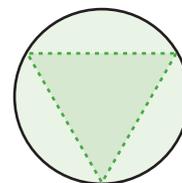


Figura 2.11

2) P_4 (quadrado).

Neste caso, $n = 4$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; logo:

$$l_4 = R\sqrt{2}, \quad a_4 = R\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad p_4 = 4R\sqrt{2}, \quad s_4 = 2R^2.$$

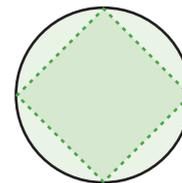


Figura 2.12

3) P_6 (hexágono).

Desde que $n = 6$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$,

$$l_6 = R, \quad a_6 = R\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_6 = 6R, \quad s_6 = 3\frac{\sqrt{3}}{2}R^2.$$

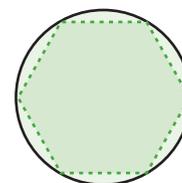


Figura 2.13

4) P_{10} (decágono)

$$\text{Neste caso, } n = 10, \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \text{ e}$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}; \text{ logo, } l_{10} = R \frac{\sqrt{5}-1}{2}, a_{10} = R \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$p_{10} = 5R(\sqrt{5}-1), s_{10} = \frac{5R^2}{4} \sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

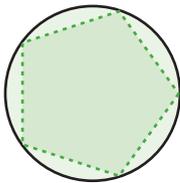


Figura 2.14

5) P_5 (pentágono)

Se não conhecêssemos o valor do seno e do cosseno do ângulo $\frac{\pi}{5}$ (36°), poderíamos determiná-los a partir do ângulo $\frac{\pi}{10}$ (18°). Para calculá-los basta aplicarmos a identidade $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, daí,

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \text{ sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Conseqüentemente,

$$l_5 = R \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}, a_5 = R \frac{\sqrt{5}+1}{4}, p_5 = \frac{5R}{2} \sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$s_5 = \frac{5R^2}{8} \sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Lista de Exercícios 1

- 1) Prove que num polígono regular todas as bissetrizes concorrem num ponto equidistante dos vértices.
- 2) Calcule o seno e o cosseno do ângulo central de um polígono regular que tem $n = 8$ lados. Aplique este resultado para determinar o lado, o apótema, o perímetro e a área deste polígono.
- 3) Mostre que se os lados de um polígono convexo inscrito a um círculo forem iguais, então o polígono é regular.
- 4) Mostre que se os ângulos de um polígono convexo circunscrito a um círculo forem iguais, então o polígono é regular.

- 5) Sejam P_n e P_{2n} os polígonos regulares de n e $2n$ lados inscritos na circunferência de raio R , respectivamente, conforme a figura 2.15.

a) Observando os $\triangle ODB$ e $\triangle BDC$ mostre que

$$l_{2n} = \sqrt{R \left[2R - \sqrt{4R^2 - l_n^2} \right]}.$$

b) Mostre que:

i) $\triangle BCD \sim \triangle OCE$

ii) $l_{2n} = \frac{R}{2a_{2n}} l_n$

iii) Conclua que $p_{2n} > p_n$.

c) $s_n = n \frac{l_n a_n}{2}. \quad (2.5)$

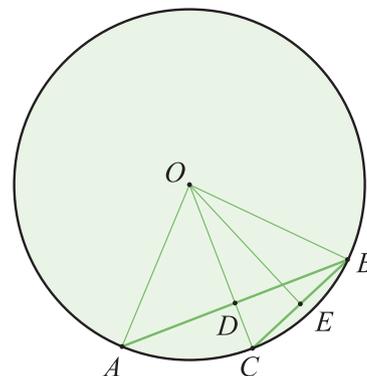


Figura 2.15

- 6) Complete a tabela abaixo e utilize uma calculadora para estimar o valor de p_n e s_n .

n	l_n	a_n	p_n	P_n	s_n	S_n
3	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$3R\sqrt{3}$	$5,1961.R$	$R^2 \frac{3\sqrt{3}}{4}$	$1,2990.R^2$
4						
5						
6						
8						
10						
12						

Tabela 2

- 7) Mostre que num hexágono regular $ABCDEF$ as diagonais AC, BD, CE, DF, EA, FB , ao se cortarem, formam um hexágono regular. Calcule a razão dos lados dos dois hexágonos.

- 8) Sobre cada lado de um hexágono regular constrói-se um quadrado. Mostre que os vértices dos quadrados, não comuns ao hexágono, são os vértices de um dodecágono (12 lados) regular.

2.2.1 Construção de Polígonos Regulares

Vamos proceder à construção de alguns poucos polígonos regulares inscritos utilizando apenas régua e compasso. A dificuldade para construirmos um polígono regular de n lados é equivalente a dificuldade para construirmos o ângulo $\frac{2\pi}{n}$ (veja novamente a proposição 2.2 e sua demonstração). Por isto, se P_n for construído é fácil construir o polígono P_{2n} .

1) triângulo eqüilátero (figura 2.16)

- construa uma circunferência de raio R centrada em O ;
- trace os diâmetros perpendiculares \overline{AB} e \overline{CD} ;
- marque o ponto médio E do segmento \overline{OC} ;
- por E trace a reta l paralela ao diâmetro \overline{AB} . Sejam F e G os pontos de encontro da circunferência com a reta l ;
- $\triangle DFG$ é eqüilátero.

Mostraremos que o ângulo $\widehat{D\hat{O}G}$ mede $\frac{2\pi}{3}$. Sejam \overline{OH} a projeção de \overline{OG} sobre \overline{OB} e α o ângulo formado entre \overline{OG} e o raio \overline{OB} ; temos $GH = OE = \frac{1}{2}R$ e $OG = R$; então

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Conseqüentemente,

$$\widehat{D\hat{O}G} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

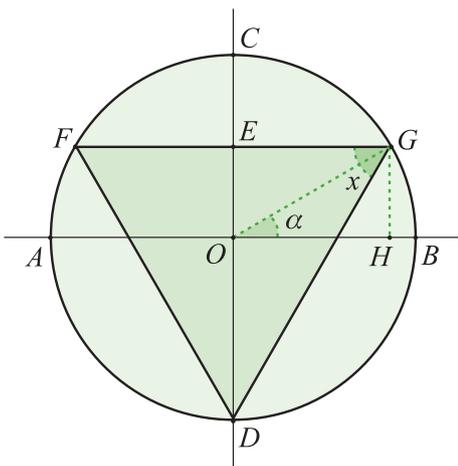


Figura 2.16

2) quadrado (figura 2.17)

- construa uma circunferência de raio R centrada em O ;
 - trace os diâmetros perpendiculares \overline{AB} e \overline{CD} ;
 - os pontos A, B, C e D são os vértices do quadrado.
- É imediato da construção que \widehat{BOC} mede $\frac{\pi}{2}$.

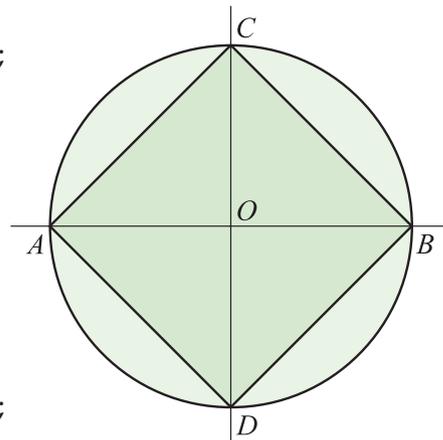


Figura 2.17

3) hexágono (figura 2.18)

- construa uma circunferência de raio R centrada em O ;
- trace o diâmetro \overline{AB} ;
- com a abertura do compasso medindo R marque, a partir de B , os vértices E, F, G e H ;
- o hexágono é formado pelos vértices $AGHBEF$.

O triângulo $\triangle OBE$ é equilátero, por isto $\widehat{BOE} = \frac{\pi}{3}$.

O hexágono também poderia ter sido construído a partir do triângulo equilátero. Para isto, considere o triângulo construído em (1);

- construa as mediatrizes relativas a cada um dos lados do triângulo;
- sejam C, I e J os pontos obtidos pela interseção das mediatrizes com a circunferência;
- $GCFIDJ$ é o hexágono procurado (figura 2.18(b)).

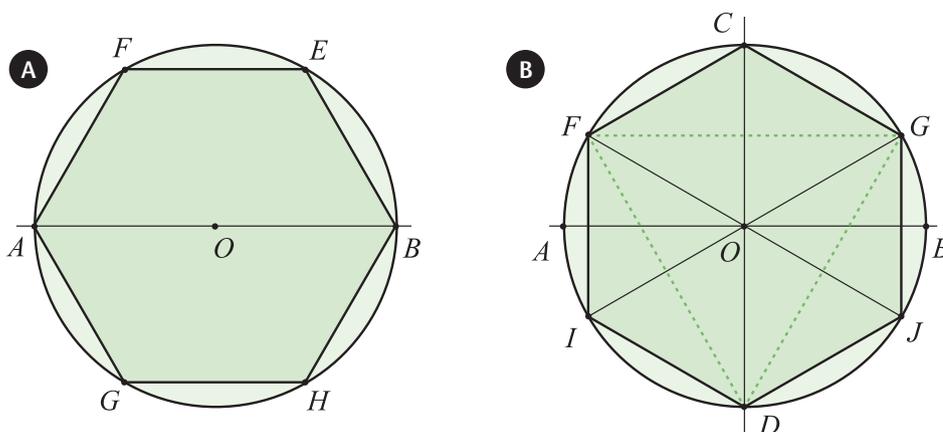


Figura 2.18

4) pentágono (figura 2.19)

- construa uma circunferência de raio R centrada em O ;
- construa os diâmetros ortogonais \overline{AB} e \overline{CD} ;
- marque E , o ponto médio do segmento \overline{OC} ;
- considere o triângulo $\triangle OBE$. Trace a bissetriz \overline{EF} do ângulo $O\hat{E}B$;
- por F trace a reta l paralela ao segmento \overline{OC} . Seja G o ponto de encontro de l com a circunferência;
- \overline{BG} é o lado do pentágono.

Vamos mostrar que $B\hat{O}G = \frac{2\pi}{5}$, ($\alpha = B\hat{O}G$):

- peelo teorema de Pitágoras $BE = \frac{R\sqrt{5}}{2}$;
- para calcularmos $OF = x$, usamos a **Relação de Stewart** em $\triangle OBE$ e $\triangle OEF$, para obtermos a igualdade:

$$OE \cdot FB = EB \cdot OF \Rightarrow \frac{R}{2}(R-x) = \frac{R\sqrt{5}}{2}x \text{ de onde}$$

$$x = \frac{R\sqrt{5}-1}{4}.$$

- segue que

$$\cos(\alpha) = \frac{OF}{R} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \text{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\text{Logo, } \alpha = \frac{2\pi}{5}.$$

- ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $\triangle BFG$, temos

$$BG^2 = 2R^2 [1 - \cos(\alpha)] = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Veja proposição 1.4 da seção 1.1.5.

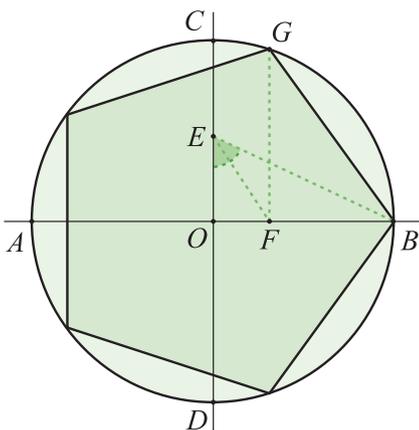


Figura 2.19

5) heptadecágono (figura 2.20).

- a) construa uma circunferência de raio R em O ;
- b) trace um diâmetro e marque o P_1 , à direita de O , na interseção da circunferência com o diâmetro traçado;
- c) construa o diâmetro ortogonal a OP_1 e marque B , acima de O , na interseção da circunferência com o diâmetro traçado;
- d) marque o ponto J sobre \overline{OB} de maneira que a medida OJ seja $1/4$ da medida de \overline{OB} ;
- e) ligue o ponto J a P_1 e encontre o ponto E de maneira que $O\hat{J}E$ meça $1/4$ da medida de $O\hat{J}P_1$;
- f) marque o ponto F sobre o diâmetro OP_1 de maneira que $O\hat{J}F = \pi/4$;
- g) construa o semicírculo com diâmetro FP_1 ;
- h) marque o ponto K na interseção do círculo do item anterior com \overline{OB} ;
- i) desenhe o semicírculo com centro em E e raio EK ;
- j) marque o ponto N_4 na interseção do semicírculo do item anterior com $\overline{OP_1}$;
- k) trace a perpendicular à $\overline{OP_1}$ por N_4 ;
- l) marque o ponto P_4 na interseção da reta traçada no item anterior com o círculo original de raio R ;
- m) P_1 e P_4 são vértices do heptadecágono;
- n) centrado em P_1 e abertura em P_4 , construa os pontos P_7, P_{10}, P_{13} e P_{16} ;
- o) centrado em P_{16} e abertura preservada do item anterior, construa os pontos $P_2, P_5, P_8, P_{11}, P_{14}$ e P_{17} ;
- p) centrado em P_4 e abertura preservada, construa os pontos $P_3, P_6, P_9, P_{12}, P_{15}$ e P_{18} ;

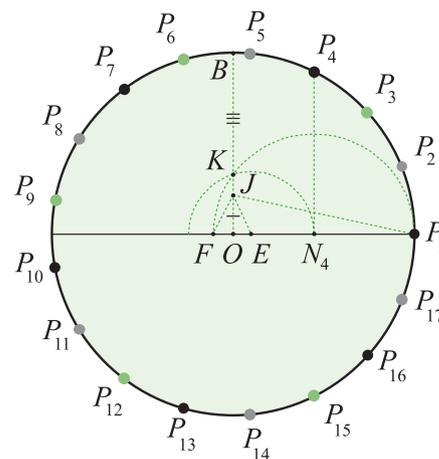


Figura 2.20

Euclides mostrou como desenhar o pentágono com régua e compasso. O heptadecágono foi descoberto pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1885) em 1796. Gauss descobriu uma condição suficiente para a construção de um polígono regular de n lados com régua e compasso; para definirmos a condição precisamos de uma definição preliminar:

Definição 2.3. Os números da forma

$$F_m = 2^{2^m} + 1, m \in \mathbb{N}$$

são denominados números de Fermat (Pierre de Fermat (1601 - 1665)).

Os números $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 257$ e $F_4 = 65537$ são primos. Sendo assim, Fermat conjecturou que os números F_m seriam sempre primos. No entanto, Leonhard Euler mostrou, em 1732, que

$$2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417.$$

Até o presente ainda não se descobriu nenhum número primo da família F_m quando $m > 4$.

Retornando a construtibilidade de polígonos regulares, Gauss descobriu que quando o número n de lados de um polígono regular P_n for da forma

$$n = 2^k \cdot F_{m_1} \dots F_{m_r}, F_{m_i} \text{ primo}, \quad (2.6)$$

então P_n é construtível com régua e compasso. Ele conjecturou que esta condição também era necessária, o que foi demonstrado por Pierre Wantzel em 1836. Lamentavelmente, a demonstração deste teorema requer conhecimento de estruturas e técnicas da Teoria de Galois.

Uma construção para o polígono de 257 lados foi dada em 1832 por F. J. Richelot, e para o polígono de 65537 lados a primeira construção foi dada por J. Hermes em 1894, embora o matemático John Conway tenha levantado dúvidas sobre a veracidade da construção.

Sobre Pierre de Fermat e Leonhard Euler e consulte o livro de Fundamentos de Matemática I.

Matemático francês que viveu entre 1814 e 1848.

Lista de Exercícios 2

- 1) Com régua e compasso, construa os seguintes polígonos regulares:
 - a) decágono (10 lados);
 - b) dodecágono (12 lados).

- 2) Para construir um polígono regular, circunscrito, de n lados, mostre que basta construir o polígono regular de n lados inscrito e traçar por cada um dos vértices a reta tangente à circunferência. Os pontos de encontro das tangentes traçadas serão os vértices do polígono circunscrito.

- 3) Mostre que no heptadecágono regular inscrito, na figura 2.20, temos $P_1\hat{O}P_2 = \frac{2\pi}{17}$. Além disto, mostre também que

$$16 \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \left[-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right]$$

- 4) Se os polígonos regulares P_n e P_m são construtíveis, mostre que P_{nm} também é construtível.

As fontes usadas para as construções e histórias sobre o assunto foram:

- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://pt.wikipedia.org/wiki/>
- <http://www.prothsearch.net/fermat.html>

2.3 Construção de π

Por volta 5º século a.C., o grego Antiphon enunciou o Método da Exaustão que consiste em construir, a partir de um polígono regular inscrito a uma circunferência, uma série de polígonos regulares que aproximam a circunferência, conforme ilustra a figura 2.21.

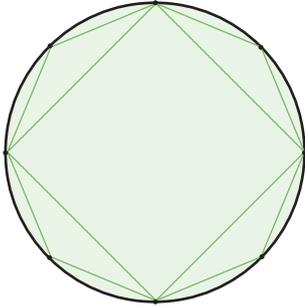


Figura 2.21

O limite está representado por $\lim_{n \rightarrow \infty}$. Este símbolo indica que o número de lados n está crescendo indefinidamente. O conceito de limite será trabalhado durante o Curso de Cálculo I.

Arquimedes (287 – 212 a.C.) aplicou o princípio da exaustão para calcular π .

Ao fixarmos uma circunferência de raio R e desenharmos os polígonos inscritos e circunscritos a ela, observamos que aumentando sucessivamente o número de lados do polígono regular ele torna-se mais próximo da circunferência. Isto justifica o nome *método da exaustão*. Intuitivamente, quando o polígono tem um número infinito de lados (no **limite** $n \rightarrow \infty$) ele torna-se a circunferência. Examinaremos este processo com detalhe.

O método de exaustão tem duas partes: (1) aproximação por polígonos inscritos e (2) aproximação por polígonos circunscritos.

Notação. os polígonos inscritos por P_n^i e os circunscritos por P_n^c . As medidas (lado, apótema, perímetro, área) de P_n^i são denotadas por (l_n, a_n, p_n, s_n) , enquanto que as medidas de P_n^c são denotadas (L_n, R, P_n, S_n) .

1) Aproximação por polígonos inscritos:

Ao compararmos as medidas l_n e l_{n+1} dos lados dos polígonos P_n^i e P_{n+1}^i , ambos inscritos numa mesma circunferência de raio R , concluímos que

$$l_{n+1} < l_n,$$

$$\text{pois, } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Já o apótema cresce com o aumento de lados,

$$a_n < a_{n+1}.$$

Uma vez que se $n \rightarrow \infty$ então $\frac{\pi}{n} \rightarrow 0$. Além disto, $\cos(0) = 1$ e segue da expressão (2.2) para o apótema que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = R \Rightarrow \frac{R}{2} \leq a_n < R, \quad \forall n \geq 3.$$

Analogamente, $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0$. Mais adiante, voltaremos a estudar o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$, pois ele será de interesse para nossos fins. O perímetro também cresce com o aumento do número de lados;

$$P_n < P_{n+1}.$$

Este crescimento é verificado a partir da desigualdade abaixo, cuja demonstração requer o uso de técnicas de **derivação**;

$$(n+1) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) > n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

2) Aproximação por polígonos circunscritos:

O próximo passo é estudarmos os polígonos circunscritos a uma circunferência de raio R . Conforme ilustra a figura 2.22, temos

$$L_n = 2R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (2.7)$$

Neste caso, a medida do apótema é igual a R , o perímetro e a área são dadas pelas expressões

$$P_n = 2nR \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad S_n = nR^2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (2.8)$$

Como a tangente é crescente no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ou seja, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$, segue que

$$L_{n+1} < L_n.$$

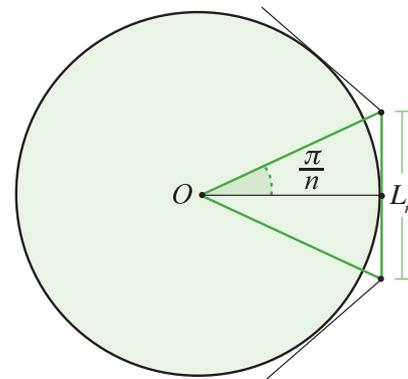


Figura 2.22

Este conceito será trabalhado no Curso de Cálculo I.

Neste caso, o perímetro P_n decresce quando n cresce; isto é,

$$P_{n+1} < P_n.$$

Para provarmos este decrescimento aplicamos a desigualdade

$$n \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) < (n+1) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n+1}\right),$$

cujas demonstração também requer técnicas de derivação.

Agora, comparemos l_n com L_n . Para isto, consideramos na figura 2.23 o triângulo retângulo ΔOAB . Ao traçarmos a altura relativa ao lado \overline{OB} temos o caso de semelhança $\Delta OCA \sim \Delta ACB$, da onde

$$\frac{l_n}{\frac{2}{a_n}} = \frac{L_n}{2} \Rightarrow \frac{L_n}{l_n} = \frac{R}{a_n}. \quad (2.9)$$

Conseqüentemente, $l_n < L_n$, como era de se esperar. Além disto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{L_n}{l_n} \right) = 1.$$

Assim, decorre de 2.9 o resultado a seguir:

Proposição 2.4. Sejam P_n^i o polígono regular inscrito e P_n^c o polígono regular circunscrito a um círculo de raio R . Se o perímetro de P_n^i é p_n e o de P_n^c é P_n , então

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{R}{a_n} \Rightarrow p_n < P_n. \quad (2.10)$$

Demonstração. É suficiente aplicarmos as expressões 2.4 e 2.8. ■

Ao compararmos as informações acumuladas até aqui, concluímos que

$$p_3 < p_4 < p_5 < \dots < p_n < \dots < P_n < \dots < P_5 < P_4 < P_3.$$

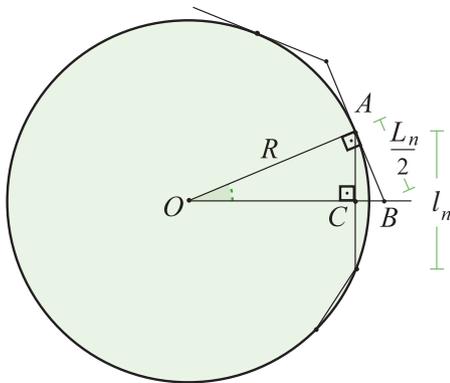


Figura 2.23

De fato, o seguinte resultado afirma que as seqüências $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ podem aproximar tanto quanto desejarmos;

Lema 2.5. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$,

$$|P_n - p_n| < \varepsilon.$$

ε é arbitrariamente pequeno.

Demonstração. De 1.10, temos que $\frac{P_n}{P_n} = \frac{a_n}{R}$. Portanto,

$$\frac{P_n - p_n}{P_n} = \frac{R - a_n}{R} \Rightarrow |P_n - p_n| = \frac{P_n}{R} |R - a_n|.$$

Porém, para $n \geq 4$ vimos $P_n < P_4 = 8R$; daí que

$$|P_n - p_n| < 8|R - a_n|.$$

Agora, como ε é um número fixo, arbitrariamente pequeno, basta tomarmos n_0 igual ao primeiro número inteiro tal que

$$|R - a_n| < \frac{\varepsilon}{8}, \text{ o que é possível porque } a_n \rightarrow R, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

■

Em suma;

- $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência monótona crescente limitada ($m < n \Rightarrow p_m < p_n$).
- $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência monótona decrescente limitada ($m < n \Rightarrow P_m > P_n$).

No estágio em que chegamos, podemos afirmar que os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ existem e são iguais;

$$C(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n.$$

Formalmente, o argumento ainda está incompleto. O argumento que falta chama-se Axioma de **Dedekind** e ele é objeto de estudo na disciplina de Análise Matemática. Decorre dele que toda seqüência monótona limitada é convergente.

Julius Wilhelm Richard Dedekind, (1831 - 1916) matemático alemão, editou o famoso tratado de Dirichlet sobre teoria dos números. Foi o primeiro a perceber a importância fundamental do conceito de grupo em álgebra e aritmética. (http://pt.wikipedia.org/wiki/Richard_Dedekind)

Vamos proceder à análise do limite. O valor $C(R)$ corresponde ao comprimento da circunferência e

$$p_n < C(R) < P_n.$$

Podemos aplicar o método de exaustão a qualquer círculo de raio R para obtermos o valor $C(R)$ do seu comprimento. O seguinte resultado demonstra o que alguns povos antigos já tinham conhecimento:

Teorema 2.6. A razão $\frac{C}{2R}$ é constante (independe de R).

Demonstração. Segue das expressões 2.4 e 2.8, para os perímetros de P_n e de p_n , que, ao considerarmos a construção de polígonos regulares em dois círculos distintos de raio R e R' ,

$$\frac{P'_n}{P_n} = \frac{p'_n}{p_n} = \frac{R'}{R} \Rightarrow \frac{P'_n}{R'} = \frac{P_n}{R} \text{ e } \frac{p'_n}{R'} = \frac{p_n}{R}. \quad (2.11)$$

Além disto,

$$\frac{p_n}{2R} < \frac{C(R)}{2R} < \frac{P_n}{2R}, \quad \frac{p'_n}{2R'} < \frac{C(R')}{2R'} < \frac{P'_n}{2R'};$$

e, por conseguinte,

$$\frac{p'_n}{2R'} - \frac{P_n}{2R} < \frac{C(R')}{2R'} - \frac{C(R)}{2R} < \frac{P'_n}{2R'} - \frac{p_n}{2R}.$$

Decorre das relações 2.11 que

$$\frac{P'_n}{2R'} = \frac{P_n}{2R} \text{ e } \frac{p'_n}{2R'} = \frac{p_n}{2R}$$

$$\frac{p_n - P_n}{2R} < \frac{C(R')}{2R'} - \frac{C(R)}{2R} < \frac{P_n - p_n}{2R};$$

ou seja,

$$\left| \frac{C(R')}{2R'} - \frac{C(R)}{2R} \right| < \frac{|P_n - p_n|}{2R}.$$

Portanto, segue do Lema 2.5,

$$\frac{C(R')}{2R'} = \frac{C(R)}{2R}.$$

■

Definição 2.7. Para qualquer circunferência, a razão do comprimento pelo diâmetro é denominada Número Pi e denotada por

$$\pi = \frac{C(R)}{2R}.$$

É imediato da definição que o comprimento da circunferência de raio R é

$$C(R) = 2\pi R \quad (2.12)$$

Apesar de já termos feito uso do número π nos capítulos anteriores, só agora é que sabemos o que é “ π ”; ainda precisamos estimar o valor de π .

A seguir mostraremos um resultado interessante para analisarmos os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$:

Lema 2.8. Seja $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Então,

$$1) \quad \text{sen}(x) \leq x \leq \text{tg}(x) \quad 2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

Demonstração. A figura 2.25 ilustra o significado geométrico;

1) Como $0 \leq \cos(x) \leq 1$, segue que

$$\text{sen}(x) \leq \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \leq \text{tg}(x).$$

Na figura 2.25, se x é medido em radianos, vale a desigualdade

$$\text{sen}(x) \leq x \leq \text{tg}(x). \quad (2.13)$$

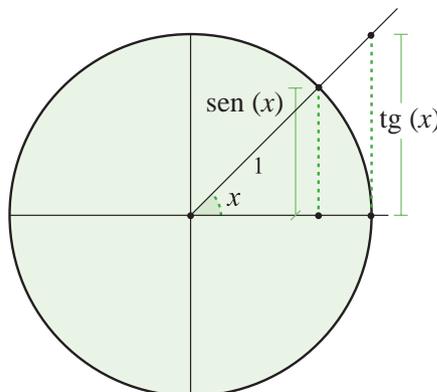


Figura 2.25



Figura 2.24

2) Dividindo os termos por $\text{sen}(x)$ obtemos

$$1 \leq \frac{x}{\text{sen}(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}, \quad (2.14)$$

ou seja,

$$\cos(x) \leq \frac{\text{sen}(x)}{x} \leq 1. \quad (2.15)$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$, conseqüentemente, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ (em 2.15 ambos os extremos da desigualdade tendem a 1 quando $x \rightarrow 0$).

■

O lema anterior significa que quando x é um número muito pequeno, aproximadamente 0 ($x \sim 0$), porém distinto de 0, o valor de $\text{sen}(x)$ é muito próximo do valor de x ; o que escrevemos

$$x \sim 0 \Rightarrow \text{sen}(x) \sim 0.$$

Desta forma, podemos determinar os seguintes limites:

Corolário 2.9. Sejam $C(R)$ o comprimento da circunferência e $A(R)$ a área do círculo;

- $C(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 2\pi R$
- $A(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^c = \pi R^2$

Demonstração. Quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\frac{\pi}{n} \sim 0$ e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi}{n}$. Conseqüentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nR \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nR \frac{\pi}{n} = 2\pi R.$$

O mesmo aplica-se a área s_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nR^2}{2} \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nR^2}{2} \frac{2\pi}{n} = \pi R^2.$$

Para determinarmos os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ é suficiente observarmos que

$$x \sim 0 \Rightarrow \text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \sim \frac{x}{\cos(x)} \sim x$$

e aplicamos as expressões em 2.8.

■

Lista de Exercícios 3

- 1) Mostre que a área do círculo é dada por

$$A(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R \cdot p_n}{2}$$

(Arquimedes afirmou que a área do círculo é igual a área do triângulo retângulo de altura R e base $C(R)$).

- 2) Método de Ahmose, antigo escriba egípcio, para o cálculo de π . Segundo os historiadores, este método é conhecido há cerca de 4.000 anos. O método consiste em pegar um quadrado de lado l e, dividindo os lados em três partes iguais, construir um octógono regular inscrito no quadrado (figura 2.26). Calcule a área do octógono e, utilizando a circunferência inscrita no quadrado, conclua que

$$\pi \approx \frac{28}{9}.$$

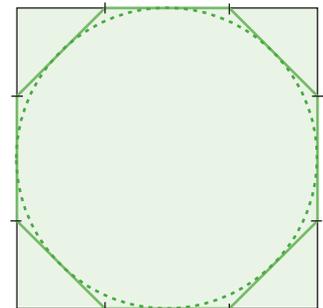


Figura 2.26

- 3) (Jogo das Miçangas) Vamos pensar em círculos como bolinhas de miçanga no plano, das quais se fazem colares. Coloque uma miçanga de raio R no centro, como ilustra a figura 2.27. Em volta da miçanga colocada, construímos um colar com miçangas de raio R , de modo que a circunferência do colar meça $2\pi \cdot (2R)$. Neste colar, acomodam-se no máximo 2π miçangas. A seguir, construímos outro colar com comprimento $2\pi \cdot (4R)$, acomodando no máximo 4π miçangas. Repetindo o processo, no terceiro colar de comprimento $2\pi \cdot (6R)$, acomodam-se no máximo 6π miçangas e, no quarto, de comprimento $2\pi \cdot (8R)$, acomodam-se no máximo 8π . Obviamente, em cada colar há uma sobra de espaço. Podemos colocar estes dados em uma tabela (tabela 3): (1) seja $[x]$ o maior inteiro menor do que x , (2) na última coluna, o raio é o da maior circunferência contendo o total de miçangas.

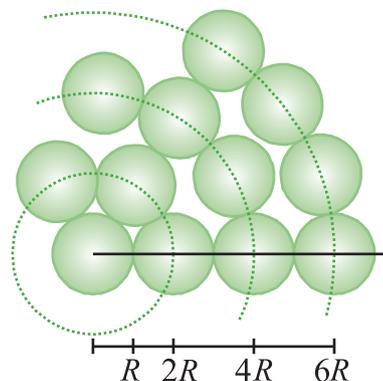


Figura 2.27

	nº miçangas	total	$[x]$	raio
centro	1	1	1	1
colar 1	2π	$2\pi + 1$	$[2\pi + 1] = 7$	$3R$
colar 2	4π	$6\pi + 1$	$[6\pi + 1] = 19$	$5R$
colar 3	6π	$12\pi + 1$	$[12\pi + 1] = 38$	$7R$
colar 4	8π	$20\pi + 1$	$[20\pi + 1] = 64$	$9R$

Tabela 3

Agora, podemos guardar as 64 miçangas numa caixa quadrada feito um tabuleiro de jogar xadrez na qual colocamos uma miçanga em cada uma das casas. Comparando a área do círculo contendo as 64 miçangas com a área da caixa, mostre que $\pi \sim 3,1605$ (este método é anterior ao de Ahmose).

2.3.1 Valor de π

Arquimedes considerou um polígono regular de 96 lados, o qual pode ser construído a partir de um hexágono e ir sucessivamente duplicando o número de lados. Consideramos $R = 1$; assim as identidades necessárias para derivarmos os valores na tabela abaixo são as seguintes:

$$\theta_n = \frac{\pi}{n}, \quad \text{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \text{se } \text{sen}(x) > 0,$$

$$l_n = 2 \text{sen}(\theta_n), \quad L_n = 2 \text{tg}(\theta_n), \quad p_n = n l_n, \quad P_n = n L_n$$

De acordo com a tabela 4, observamos que o comprimento da circunferência de raio $R = 1$ está estimado por

$$6,2822 < C < 6,2860,$$

da onde $3,1411 < \frac{C}{2} < 3,1430$. Como $\frac{10}{71} \sim 0,140845$ e $\frac{1}{7} \sim 0,142857$.

n	θ_n	$\text{sen}(\theta_n)$	$\text{tg}(\theta_n)$	l_n	L_n	p_n	P_n
6	$\frac{\pi}{6}$	0,5	0,5773	1	1,1546	6	6,9276
12	$\frac{\pi}{12}$	0,2558	0,2679	0,5116	0,5358	6,1392	6,4296
24	$\frac{\pi}{24}$	0,1305	0,1316	0,261	0,2632	6,264	6,3168
48	$\frac{\pi}{48}$	0,06540	0,0655	0,1308	0,131	6,2784	6,288
96	$\frac{\pi}{96}$	0,03274	0,03274	0,06544	0,06548	6,2822	6,2861

Tabela 4

Arquimedes afirmou que

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}. \quad (2.16)$$

Ele fez isto sem utilizar trigonometria. O valor de $\pi = \frac{22}{7}$ tornou-se padrão entre os Romanos agrimensores e entre os pedreiros medievais.

Vários métodos foram empregados para determinar π . O matemático hindu Brahmagupta (598 d.C.) usou o valor $\pi = \sqrt{10} = 3,162277$, provavelmente porque os perímetros dos polígonos com 12, 24, 48 e 96 lados inscritos numa circunferência de diâmetro medindo 10 valem $\sqrt{965}$, $\sqrt{981}$, $\sqrt{986}$ e $\sqrt{987}$. Ele deve ter assumido que o limite deveria ser $\sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$, o que o levou a concluir que $\pi = \sqrt{10}$. Na china, Liu Hui (294 d.C.), trabalhando sobre um polígono de 3072 lados obteve $\pi = 3,14159$. Um cálculo do 5º século d.C., com um polígono de 24576 lados, resultou em $\pi = 3,141592903$. Porém o método de aproximação por polígonos não é muito eficiente devido a convergência ser lenta. François Viète (1540 – 1603), um advogado e conselheiro do Parlamento da Britânia, usou um polígono de 393216 lados (16 duplicações do hexágono) para chegar a $\pi = 3,141592653$. Hoje, com o auxílio de máquinas calculadoras e de computadores, as primeiras 100 casas decimais conhecidas de π são

3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209
749445923078164062862089986280348253401170479

Apaixonado pela álgebra, passou para a história como o principal responsável pela introdução do símbolo no mundo da matemática. (Fonte: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2001/icm34/viete.htm).

Desta forma, um polígono de 96 lados gera uma aproximação ($\pi = 3,1428$) cujas 2 primeiras casas decimais estão corretas, com 3072 lados são 5 casas decimais corretas e, após adicionar 390.144 lados, usando um polígono de 393.216 lados, se ganha mais 4 casas decimais corretas.

Viète fez mais, ele também considerou a aproximação de π calculando a área dos polígonos quando duplicados os lados. Conforme já vimos (equação 2.4 da seção 2.2), se $\theta_n = \frac{\pi}{n}$, então

$$s_n = \frac{R^2 n}{2} \text{sen}(2\theta_n), \quad (2.17)$$

$$s_{2n} = R^2 n \cdot \text{sen}(\theta_n). \quad (2.18)$$

conseqüentemente, $\frac{s_n}{s_{2n}} = \cos(\theta_n)$. Repetindo o processo 2 vezes temos

$$\frac{s_n}{s_{4n}} = \frac{s_n}{s_{2n}} \cdot \frac{s_{2n}}{s_{4n}} = \cos(\theta_n) \cdot \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right);$$

e repetindo k vezes

$$\frac{s_n}{s_{2^k n}} = \cos(\theta_n) \cdot \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta_n}{2^k}\right). \quad (2.19)$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2^k n} = \pi R^2$, ao substituímos 2.17 em 2.19, temos

$$\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{2} \cdot \text{sen}(2\theta_n)}{\cos(\theta_n) \cdot \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta_n}{2^k}\right)}.$$

Viète, utilizando a identidade

$$\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\theta_n)},$$

começou com um quadrado ($n = 4$, $\theta_4 = \frac{\pi}{4}$) e obteve a fórmula

$$\pi = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}} \cdots \quad (2.20)$$

A fórmula de Viète foi a primeira a expressar π numa seqüência infinita de operações. Na época de Viète, não havia rigor matemático, por isto ele não se preocupou em mostrar a convergência da série 2.20. Foi F. Rudio, em 1891, quem provou que a série converge. Embora curiosa e inovadora, a fórmula 2.20 também não converge rápido.

No mesmo ano que Viète quebrou o recorde com 9 casas decimais, 1593, o holandês Adrien van Roman (1561 – 1615) usando polígonos regulares com 2^{30} lados calculou 17 casas decimais, mas apenas 15 estão corretas. Três anos mais tarde, Ludolph van Ceulen (1539 – 1610), um outro holandês, obteve 35 casas decimais com um polígono com 2^{62} lados. Ludolph dedicou a sua vida para obter mais dígitos de π como o número de Ludolph. Mas a era do Cálculo e das séries estava aportando na história e nos anos subseqüentes os caçadores de dígitos usaram técnicas novas que se mostraram muito mais eficientes do que o Método da exaustão. Usando séries, Leonhard Euler (1707 – 1783) obteve 20 casas decimais em 1 hora.

2.4 Setores, Segmentos e Coroas Circulares

Seja C uma circunferência de raio R e \bar{C} o círculo correspondente:

- a) Sejam A e B dois pontos sobre C e \widehat{AOB} o ângulo definido pelas semi-retas \bar{l}_{OA} e \bar{l}_{OB} medindo α . O setor circular com ângulo α é a região do ângulo \widehat{AOB} contida em \bar{C} (figura 2.28). Denotamos o setor por set_{AB} .

Quando o ângulo α está medido em radianos, o comprimento do arco definido por α é $l = R\alpha$ e a área de um setor circular é determinada pela aplicação de uma simples regra de três:

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \dots \dots \pi R^2 \\ \alpha \dots \dots \dots A \end{array} \right| \Rightarrow A_{set_{AB}} = \frac{R^2 \alpha}{2}. \quad (2.21)$$

(A aplicação de regra de três é possível porque a dependência de A em função de α é linear).

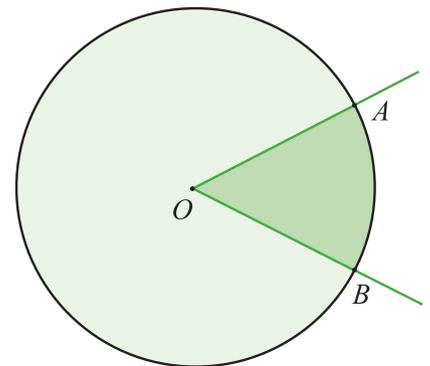


Figura 2.28

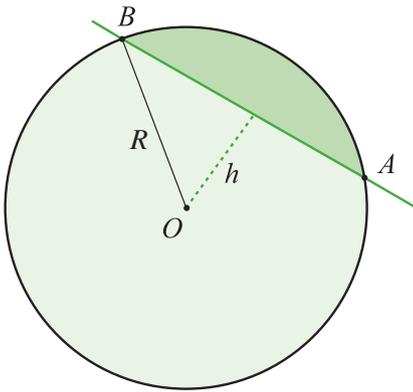


Figura 2.29

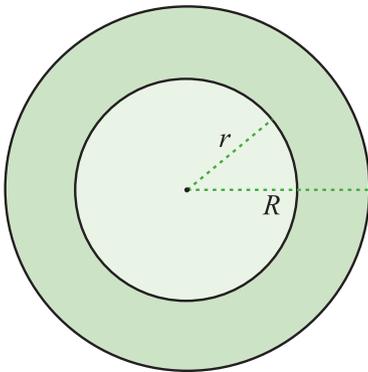


Figura 2.30

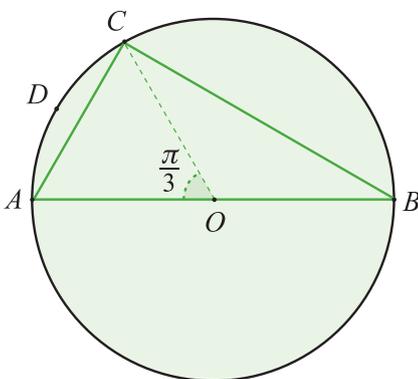


Figura 2.31

- b) Seja \overline{AB} uma corda de C . O segmento circular definido por A , B e \overline{AB} é a região $seg_{AB} = set_{AB} - \Delta OAB$ de C (figura 2.29).

Para determinarmos a área do segmento seg_{AB} , basta conhecermos a distância do ponto O ao segmento definido por \overline{AB} ; digamos que seja h . Então,

$$A_{seg_{AB}} = \frac{lR}{2} - h\sqrt{R^2 - h^2},$$

onde l é o comprimento do arco \widehat{AB} .

Em termos do ângulo α , medido em radianos, temos

$$A_{seg_{AB}} = (\alpha - \text{sen}(\alpha)) \frac{R^2}{2}. \quad (2.22)$$

- c) Seja C' uma circunferência de centro igual ao de C e raio $r < R$. C e C' definem a coroa circular (figura 2.30)

$$Cor_{CC'} = \overline{C} - \overline{C'}.$$

A área da coroa é imediata,

$$A_{Cor_{cc'}} = \pi(R^2 - r^2). \quad (2.23)$$

Exemplos:

- 1) Seja ΔABC um triângulo retângulo com hipotenusa \overline{AB} medindo d . Seja O o centro da circunferência circunscrita à ΔABC e suponha que o ângulo $A\hat{O}C$ mede $\frac{\pi}{3}$. Determine a área da região limitada pelas cordas \overline{BC} e \overline{BA} e o arco \widehat{ADC} (figura 2.31)

Seja A a área desejada; então

$$A = A_{set_{OAC}} + A_{\Delta OCB} = \frac{R^2\pi}{6} + \frac{1}{2}R^2\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\frac{R^2\pi}{6} + \frac{R^2}{4}\sqrt{3} = \frac{d^2}{48}(2\pi + 3\sqrt{3}).$$

- 2) Exemplo de Hipócrates de Chios (4º século a.C.).

Este tipo de exemplo justifica a crença que os gregos tinham em realizar a quadratura do círculo. Considere um semicírculo

culo de raio R centrado em O e diâmetro \overline{AC} . Seja B um ponto sobre a circunferência do círculo de maneira que o triângulo $\triangle ABC$ seja isósceles. Consideramos o arco \widehat{ADC} , conforme ilustra a figura 2.32, construído sobre uma circunferência de raio R_1 , centrada em O' , de tal maneira que $R_1 = R\sqrt{2}$. Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 as áreas marcadas na figura. Hipócrates mostrou que a área $S = S_2 + S_3 + S_4$ é igual a a área de $\triangle ABC$, que vale $S_1 + S_2$. Portanto, precisamos mostrar que $S_1 = S_3 + S_4$.

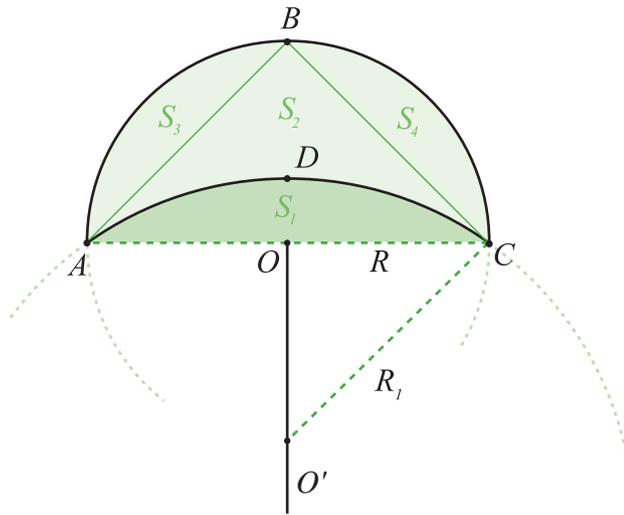


Figura 2.32

a) S_3 e S_4 .

Observe que $\overline{OB} = R$ e que $\triangle ABC$ é retângulo em \hat{B} . Assim, $(AB)^2 = (BC)^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$. Portanto,

$$R^2 = \frac{(AB)^2}{2} = \frac{(BC)^2}{2}.$$

$$S_3 = A_{\text{set}_{AB}} - A_{\triangle OAB} \quad (\text{usamos eq. 2.21 para } A_{\text{set}_{AB}})$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \frac{(AB)^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{(AB)^2}{2} = \frac{(AB)^2}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right),$$

$$S_4 = \frac{(BC)^2}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

b) S_1 .

Como o ângulo $\widehat{AO'C}$ é reto, segue que

$$S_1 = \frac{(AC)^2}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras temos

$$S_3 + S_4 = \frac{(AC)^2 + (BC)^2}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{(AC)^2}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = S_1.$$

Conseqüentemente, $S = S_{\Delta ABC}$.

Lista de Exercícios 4

- 1) Determine a área das regiões hachuradas, em função da medida l do lado do quadrado na figura 2.33.

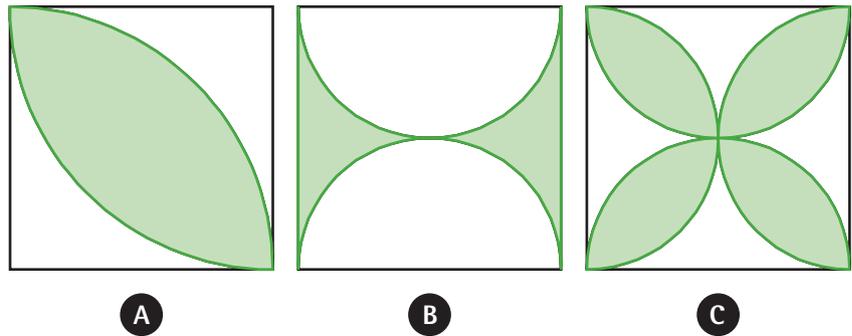


Figura 2.33

- 2) Em cada uma das figuras em 2.34 mostre que:
- $S_1 = S_2$ (figura 2.34 (a))
 - $S = S_1 + S_2$ (figura 2.34 (b))

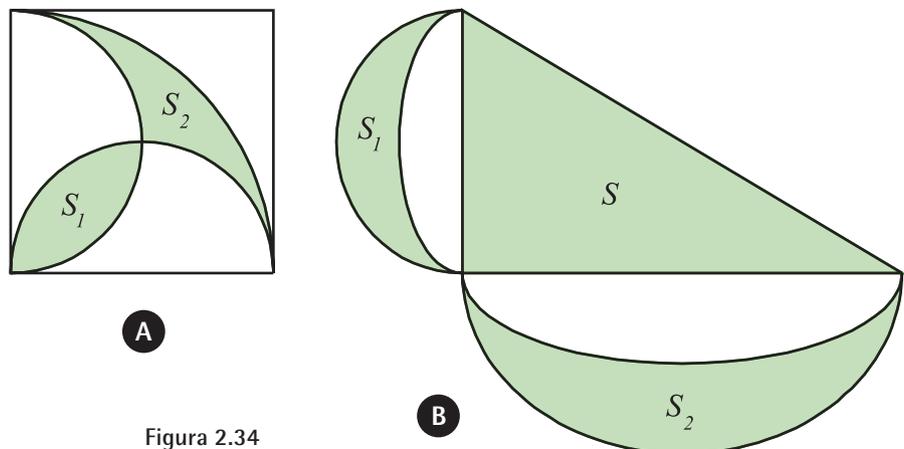


Figura 2.34

- 3) Calcule a área da superfície sombreada em função da medida l do lado do quadrado na figura 2.35.

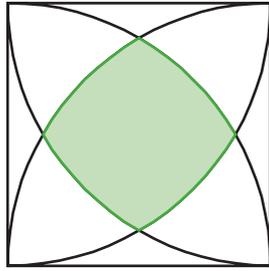


Figura 2.35

2.5 Fascinante, Irracional e Transcendente

Em 1767, o matemático suíço Johann Lambert (1728 – 1777) provou que π é um número irracional. Adrien Marie Legendre (1752 – 1833) apresentou uma prova mais rigorosa e tanto ele como Lambert fizeram uso de frações contínuas. Lambert mostrou que:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}}}$$

Investigando as frações contínuas, Lambert mostrou que se x é um número racional não-nulo, então $\text{tg}(x)$ é irracional. Como $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, ele concluiu que π não pode ser racional. Legendre provou que π^2 não é racional, desfazendo as esperanças de que π fosse raiz quadrada de um número racional. De fato, Legendre escreveu que, muito provavelmente, π não era um número algébrico, o que foi confirmado em 1882 quando F. Lindemann publicou uma demonstração da conjectura.

Observação. Um número é dito ser algébrico se é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros, caso contrário, dizemos que é transcendente. Todos os racionais são números algébricos, pois p/q é solução de $qx - p = 0$. Também são algébricos os números $z = \sqrt[n]{p}$, pois $z^n - p = 0$. Como mencionamos anteriormente, seguindo as regras impostas pelos axiomas de Euclides, com um número finito de operações usando régua e compasso, só podemos construir retas e círculos. Portanto, se um número é transcendente, é impossível construí-lo “com régua e compasso”. Isto encerra a questão matemática da quadratura do círculo.

Não obstante, a natureza humana tem as suas maravilhas. O sucesso alcançado com o trabalho de muitos ao longo de milhares de anos não fechou as portas para algumas mentes pensantes que são ativas, mas incapazes de perceber que o alvo delas está errado. Muitas delas são engrenagens surrealistas. Problemas muito antigos fascinam as pessoas, o da quadratura é um deles. Tantas eram as soluções enviadas que, em 1775, que a Academia Francesa decidiu não aceitar mais a submissão de soluções da quadratura do círculo; é claro, todas erradas. Em 1882, Lindemann encerrou a questão. Porém, como bem disse **Hermann Schubert**, “a raça dos quadradores de círculo perdurará tanto quanto a ignorância e a sede por glória permanecerem unidas”. Apenas por curiosidade histórica e deleite do surrealismo, citamos alguns famosos casos citados em Beckmann, 1971:

Squaring of the Circle, 1899. |

- a) Em 1897, a Casa dos Representativos do Estado de Indiana, Estados Unidos, aprovou uma lei legislando o valor de $\pi = 3$. O autor da lei foi o médico Edwin J. Goodman de Solitude, Posey County, Indiana. O projeto de lei foi introduzido na Casa Legislativa pelo Sr. Taylor I. Record, representante de Posey County, em 18 de janeiro de 1897. O projeto recebeu o título *Uma Lei introduzindo uma nova verdade Matemática*. O projeto passou por unanimidade pelas comissões sendo justificado pelo seguinte argumento no preâmbulo da lei:

Uma Lei para introduzir uma nova verdade matemática e oferecer, como contribuição a educação, que apenas o Estado de Indiana faça uso livre de qualquer custos de direitos autorais, desde que a proposta de lei seja aceita e aprovada por meios legais da legislatura em 1897.

Em 5 de fevereiro de 1897 a Casa aprovou a lei por unanimidade (67 a 0). A seguir, a lei foi para o Senado onde foi aprovada numa comissão sem que houvesse algum comentário. Então, por sorte do acaso, o Professor C. A. Waldo, do Departamento de Matemática da Universidade de Purdue, encontrava-se no Senado quando se sentiu surpreso com um debate na Casa a respeito de uma questão matemática. Horrorizado, ele conversou com os senadores e, na segunda leitura da lei em 12/02/1897, o Senado postergou o encaminhamento da Lei por prazo indeterminado. Desde então, a Lei não retornou a agenda.

- b) John A. Parker publicou em 1874, em Nova York, o livro *A Quadratura do Círculo. Contendo provas dos erros dos Geômetras ao obter as aproximações em uso*. De acordo com Beckman (1971), o livro é uma obra devotada ao erro, ao bizarro, capaz de deixar pessoas surrealistas profissionais com a emoção da incompetência. Não bastassem os erros, o Sr. Parker ainda completou:

Penso que a classe dos professores, embora letrados e treinados em teorias, estão entre os menos competentes para julgar sobre uma nova descoberta [...] Conseqüentemente, os homens práticos de idade estão, pelo menos um século, mais avançados do que as escolas e todo o conhecimento científico.

- c) Um caso mais exacerbado de maníaco pela quadratura foi o de Carl Theodore Heisel, que se descreveu como cidadão de Cleveland, Ohio, e maçom 33°. Em 1931, ele publicou o livro *Mathematical and Geometrical Demonstrations*, onde na página título ele faz diversas afirmações surpreendentes:

A quadratura do Círculo além de qualquer refutação, [...] Extraordinária e Significante descoberta (por Carl T. Faber) do Elo Perdido que faltava na demonstração do Problema de Pitágoras, desaprovando completamente a sua verdade absoluta.

O número π tornou-se tão carismático a ponto de criarem um dia para comemorá-lo. Nos Estados Unidos, escreve-se a data começando pelo mês; por isto, considera-se que o grande dia de π foi 14 de março de 1592, às 6h53'58", o que perfaz as 11 primeiras

casas decimais de π 3,14159265358. Assim, ficou estabelecido o dia 14 de março, à 1h59', para celebrar π ; não ficou especificado se se trata de 1h59' da madrugada ou 13h59'. Por ventura, se houver uma reunião, então celebra-se juntamente a data de nascimento de Albert Einstein (14/03/1879). Aqueles que não se dobram ao critério americano de escrever a data, ou se ela não lhes for conveniente, podem juntar-se às comemorações do dia 22/07.

Se as datas acima não ajudarem a memorizar as casas decimais de π , pois algumas pessoas têm dificuldades com números, existem diversos poemas em diversas línguas para ajudá-los. Em cada frase ou poema destes contam-se o número de letras a qual chamaremos de N . Se $N < 10$, considera-se o próprio N como dígito do π , se $N = 10$, considera-se o 0 (zero) e se $N > 10$ é considerado o próprio N como dois dígitos adjacentes de π . Divirta-se com os exemplos:

a) 14 casas decimais

How I need a drink, alcoholic in nature, after the heavy lectures involving quantum mechanics!

b) 31 casas decimais

But a time I spent wandering in bloomy night; Yon tower, tinkling chimewise, loftily opportune. Out, up, and together came sudden to Sunday rite, The one solemnly off to correct plenilune.

c) 740 casas decimais (adaptação do poema *Near a Raven*, de Edgar Allan Poe):

Poe, E.

Near a Raven

Midnights so dreary, tired and weary.
Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore.
During my rather long nap - the weirdest tap!
An ominous vibrating sound disturbing my chamber's antedoor.
"This", I whispered quietly, "I ignore".

Perfectly, the intellect remembers: the ghostly fires,
 a glittering ember.
 Inflamed by lightning's outbursts, windows cast penumbras
 upon this floor.
 Sorrowful, as one mistreated, unhappy thoughts I heeded:
 That inimitable lesson in elegance - Lenore -
 Is delighting, exciting... nevermore.

Ominously, curtains parted (my serenity outsmarted),
 And fear overcame my being - the fear of "forevermore".
 Fearful foreboding abided, selfish sentiment confided,
 As I said, "Methinks mysterious traveler knocks afore.
 A man is visiting, of age threescore."

Taking little time, briskly addressing something: "Sir," (robustly)
 "Tell what source originates clamorous noise afore?
 Disturbing sleep unkindly, is it you a-tapping, so slyly?
 Why, devil incarnate! - "Here completely unveiled I my antedoor -
 Just darkness, I ascertained - nothing more.

While surrounded by darkness then, I persevered to clearly
 comprehend.
 I perceived the weirdest dream...of everlasting "nevermores".
 Quite, quite, quick nocturnal doubts fled - such relief! - as my
 intellect said,
 (Desiring, imagining still) that perchance the apparition was
 uttering a whispered "Lenore".
 This only, as evermore.

Silently, I reinforced, remaining anxious, quite scared, afraid,
 While intrusive tap did then come thrice - O, so stronger than
 sounded afore.
 "Surely" (said silently) "it was the banging, clanging
 window lattice."
 Glancing out, I quaked, upset by horrors hereinbefore,
 Perceiving: a "nevermore".

Completely disturbed, I said, "Utter, please, what prevails ahead.
 Repose, relief, cessation, or but more dreary 'nevermores'?"
 The bird intruded thence - O, irritation ever since! -

Then sat on Pallas' pallid bust, watching me (I sat not, therefore),
And stated "nevermores".

Bemused by raven's dissonance, my soul exclaimed,
"I seek intelligence;
Explain thy purpose, or soon cease intoning forlorn 'nevermores!'"
"Nevermores", winged corvus proclaimed - thusly was a
raven named?
Actually maintain a surname, upon Pluvius seashore?
I heard an oppressive "nevermore".

My sentiments extremely pained, to perceive an utterance
so plain,
Most interested, mystified, a meaning I hoped for.
"Surely," said the raven's watcher, "separate discourse is wiser.
Therefore, liberation I'll obtain, retreating heretofore -
Eliminating all the 'nevermores' ".

Still, the detestable raven just remained, unmoving, on
sculptured bust.
Always saying "never" (by a red chamber's door).
A poor, tender heartache maven - a sorrowful bird - a raven!
O, I wished thoroughly, forthwith, that he'd fly heretofore.
Still sitting, he recited "nevermores".

The raven's dirge induced alarm - "nevermore" quite wearisome.
I meditated: "Might its utterances summarize of a
calamity before?"
O, a sadness was manifest - a sorrowful cry of unrest;
"O," I thought sincerely, "it's a melancholy great - furthermore,
Removing doubt, this explains 'nevermores' ".

Seizing just that moment to sit - closely, carefully,
advancing beside it,
Sinking down, intrigued, where velvet cushion lay afore.
A creature, midnight-black, watched there - it studied my soul,
unawares.

Wherefore, explanations my insight entreated for.
Silently, I pondered the "nevermores".

"Disentangle, nefarious bird! Disengage - I am disturbed!"
 Intently its eye burned, raising the cry within my core.
 "That delectable Lenore - whose velvet pillow this was, heretofore,
 Departed thence, unsettling my consciousness therefore.
 She's returning - that maiden - aye, nevermore."

Since, to me, that thought was madness, I renounced
 continuing sadness.
 Continuing on, I soundly, adamantly forswore:
 "Wretch," (addressing blackbird only) "fly swiftly
 - emancipate me!"
 "Respite, respite, detestable raven - and discharge me, I implore!"
 A ghostly answer of: "nevermore".

" 'Tis a prophet? Wraith? Strange devil? Or the ultimate evil?"
 "Answer, tempter-sent creature!", I inquired, like before.
 "Forlorn, though firmly undaunted, with 'nevermores' quite
 indoctrinated,
 Is everything depressing, generating great sorrow evermore?
 I am subdued!", I then swore.

In answer, the raven turned - relentless distress it spurned.
 "Comfort, surcease, quiet, silence!" - pleaded I for.
 "Will my (abusive raven!) sorrows persist unabated?
 Nevermore Lenore respondeth?", adamantly I encored.
 The appeal was ignored.

"O, satanic inferno's denizen -- go!", I said boldly, standing then.
 "Take henceforth loathsome "nevermores" - O, to an ugly
 Plutonian shore!
 Let nary one expression, O bird, remain still here, replacing mirth.
 Promptly leave and retreat!", I resolutely swore.
 Blackbird's riposte: "nevermore".

So he sitteth, observing always, perching ominously on
 these doorways.
 Squatting on the stony bust so untroubled, O therefore.
 Suffering stark raven's conversings, so I am condemned,
 subserving,
 To a nightmare cursed, containing miseries galore.
 Thus henceforth, I'll rise (from a darkness, a grave) - nevermore!

A leitura dos versos, ou qualquer outro processo para memorizarmos os dígitos decimais de π , podem ser tediosos para alguns. Mas nem todos pensam assim: em 2 de julho de 2005, o japonês Akira Haraguchi recitou (sem ler) as primeiras 83.431 casas decimais de π estabelecendo um novo recorde mundial para a categoria.

To π or not to π .

Capítulo 3

Geometria no Espaço

Capítulo 3

Geometria no Espaço

Neste capítulo, estudaremos geometria no espaço, onde há uma dimensão a mais do que no plano. Nossa abordagem visa examinar as propriedades métricas como distância, áreas e volumes de figuras tridimensionais.

A dimensão extra no espaço, relativamente ao plano, introduz diversos fenômenos geométricos interessantíssimos que vão além do escopo deste livro. Um exemplo, que veremos mais adiante, é o fato de que no espaço existem apenas 5 poliedros regulares, enquanto que, no plano, existem infinitos polígonos regulares. Uma dificuldade para estudarmos a geometria no espaço é a nossa limitação visual, uma vez que a nossa percepção da profundidade dos objetos é imprecisa.

Como o foco deste estudo serão as propriedades métricas de figuras tridimensionais, a descrição axiomática será feita dentro do necessário para obtermos os resultados almejados, mas não daremos ênfase aos axiomas.

Ao estudarmos as propriedades geométricas no espaço, frequentemente reduziremos este estudo a problemas no plano, onde dispomos de técnicas eficazes.

3.1 Ponto, Reta e Plano

Os elementos primitivos na geometria espacial são ponto, reta, plano e espaço.

Axioma 3.1. Dois pontos do espaço determinam uma única reta.

Axioma 3.2. Três pontos não-colineares no espaço determinam um único plano.

Axioma 3.3. Se um plano contém dois pontos pertencentes a uma reta, então a reta está contida no plano.

Axioma 3.4. Qualquer que seja a reta contida num plano, existem pontos no plano que pertencem à reta e pontos no plano que não pertencem a reta.

Axioma 3.5. Qualquer que seja o plano no espaço, existem pontos no espaço que pertencem ao plano e pontos que não pertencem ao plano.

Com estes axiomas podemos provar a seguinte afirmação:

Proposição 3.6. Uma reta r e um ponto P não pertencente a r determinam um único plano no espaço no qual estão contidos.

Demonstração. Considere Q e R dois pontos sobre r . Assim P , Q e R são não-colineares e, pelo axioma 2, determinam um único plano α . Segue do axioma 3.3 que o plano α contém r .

■

A seguir, investigaremos as posições relativas entre:

- a) retas e retas;
- b) retas e planos;
- c) planos e planos.

Notação. Os pontos serão denotados por letras latinas maiúsculas, as retas por letras latinas minúsculas e os planos por letras gregas minúsculas.

Lista de Exercícios 1

- 1) Mostre que duas retas concorrentes são coplanares (pertencem a um mesmo plano).

3.1.1 Posição Relativa entre Retas

Existem duas possibilidades para duas retas no espaço:

- 1) serem coplanares;
- 2) não serem coplanares.

Sendo coplanares, existem duas possibilidades:

- a) serem concorrentes;
- b) serem paralelas.

Quando as retas não são coplanares dizemos que são reversas. A figura 3.1 ilustra as possíveis situações entre duas retas r e s , resumidas na tabela abaixo:

Figura	Posição relativa	$r \cap s$	r e s são coplanares?
a	concorrentes	P	sim
b	paralelas	\emptyset	sim
c	reversas	\emptyset	não

Tabela 1

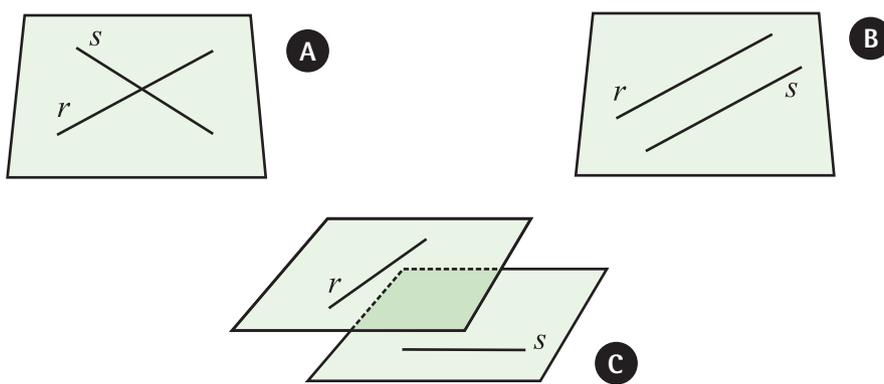


Figura 3.1

Assim como na Geometria Plana, temos o axioma das paralelas:

Axioma 3.7. Por um ponto P fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta paralela à reta r .

Uma observação muito útil, decorrente do axioma 3.7, é que, dadas duas retas transversais (isto é, não pertencem a um mesmo plano) r e s e um ponto $P \in r$ podemos construir uma única reta s' passando por P que é paralela a s ; neste caso, dizemos que s' e r são conduzidas pelo ponto P . Para construirmos s' , consideramos o único plano definido por s e P ; neste plano, construímos s' como sendo a única reta paralela a s passando por P .

3.1.2 Posição Relativa entre Reta e Plano

O axioma 3.3 reduz as possibilidades da posição relativa entre uma reta r e um plano α a apenas três casos, como ilustra a figura 3.2:

- $r \subset \alpha$,
- $r \cap \alpha = \{P\}$, quando dizemos que r é secante à α ,
- $r \cap \alpha = \emptyset$, quando dizemos que r é paralela à α .

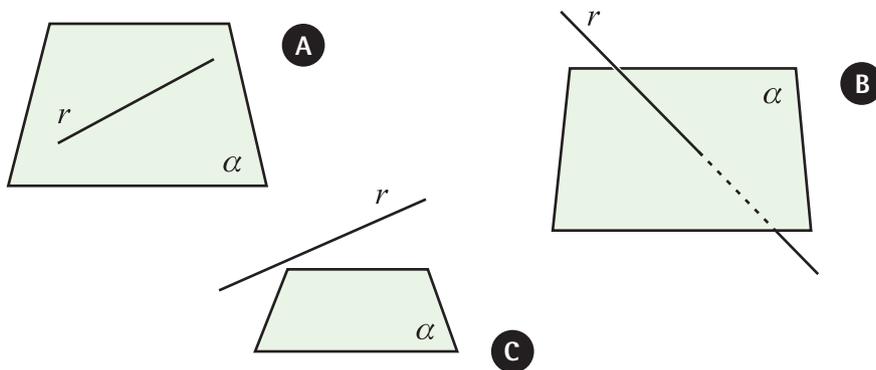


Figura 3.2

3.1.3 Posições Relativas entre dois Planos

Há duas possibilidades para analisarmos as posições relativas entre os planos distintos α e β :

- $\alpha \cap \beta = \emptyset$, (dizemos que eles são paralelos),
- $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, (dizemos que eles são secantes).

O segundo caso requer uma melhor análise para sabermos o que ocorre na interseção $\alpha \cap \beta$. Ao visualizarmos como as paredes intersectam-se ou como as mesas intersectam as paredes, observamos que o mais comum é que a interseção seja uma reta. Pois bem:

Proposição 3.8. Se dois planos distintos possuem mais de um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Demonstração. Sejam α e β dois planos distintos tais que $\alpha \cap \beta = \{P, Q\}$. Pelo axioma 3.1, os pontos P e Q definem uma única reta r e, pelo axioma 3.3, r está contida nos planos α e β . Se existe um ponto R tal que $R \in \alpha \cap \beta$ e $R \notin r$, então temos três pontos P, Q e R não-colineares pertencendo a α e a β . Pelo axioma 3.2 temos $\alpha = \beta$. Portanto, o ponto R não existe e $\alpha \cap \beta = r$.

■

Até hoje, ninguém cuja opinião é confiável observou dois planos intersectando-se num único ponto.

Desta forma, só nos resta tratarmos do caso quando a interseção entre dois planos distintos é um único ponto. Para isto, precisaremos do seguinte **axioma**:

Axioma 3.9. Se dois planos possuem um ponto em comum, então a interseção deles é uma reta.

Como ilustra a figura 3.3, só há três possibilidades para as posições relativas entre dois planos:

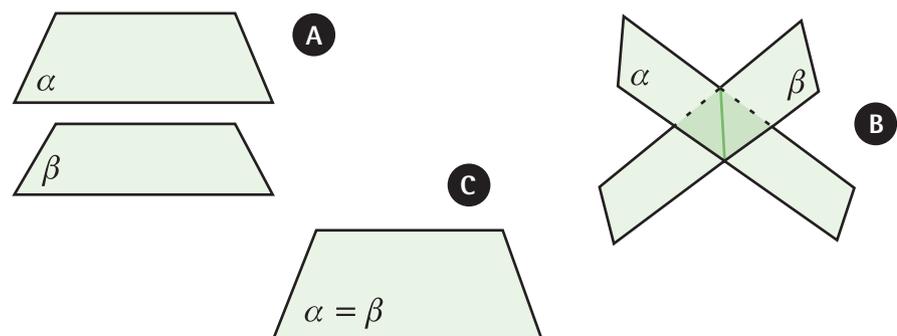


Figura 3.3 - (a) paralelos, (b) secantes e (c) coincidentes

No espaço, o conceito de paralelismo entre duas retas está atrelado à existência de um plano contendo-as:

Proposição 3.10. Considere uma reta r e um plano α paralelo a r . Sejam P e Q pontos pertencentes a α e considere que r_P e r_Q são retas, obtidas ao conduzirmos r por P e Q , respectivamente. Então, r_P e r_Q são paralelas.

Demonstração. Considere os planos α_P e α_Q determinados pelos pares (P, r) e (Q, r) . Decorre da proposição 3.6 e do axioma 3.9 que $\alpha_P \cap \alpha_Q = \{r\}$. Se r_P e r_Q não são paralelas, então existe um ponto $R \in r_P \cap r_Q$. Conseqüentemente, $R \in \alpha_P \cap \alpha_Q$ e, por isto, $R \in r$, o que contradiz a hipótese. Logo, r_P e r_Q são paralelas. ■

Concluimos da proposição acima que paralelismo no espaço define uma relação de equivalência, isto é, se $r // s$ e $s // t$, então $r // t$ (figura 3.4)

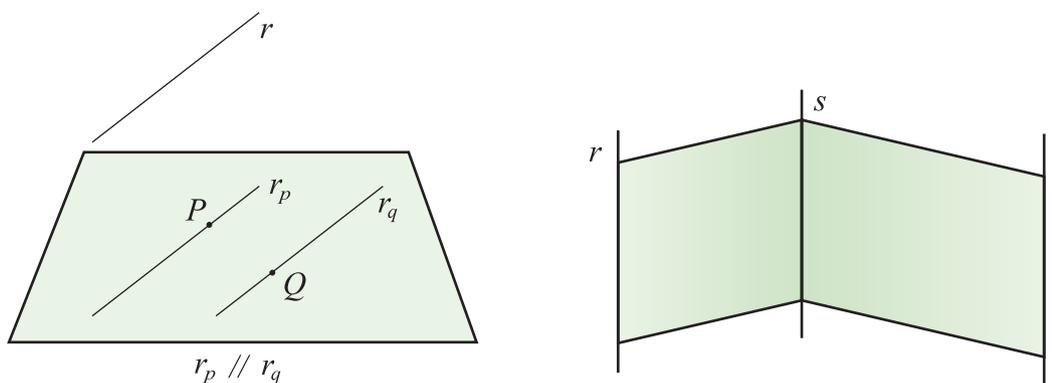


Figura 3.4

Lista de Exercícios 2

- 1) Utilizando os axiomas, justifique o fato de duas retas concorrentes serem coplanares.
- 2) Quantos planos são determinados por 4 pontos não coplanares? E se houvessem 5 pontos não coplanares?
- 3) Sejam r e s duas retas concorrentes no ponto O . Seja P um ponto fora do plano determinado por r e s . Qual é a interseção do plano definido por r e P com o plano definido por s e P ?
- 4) Dois planos são paralelos a uma reta r . Descreva as possíveis posições relativas entre os planos.

3.2 Construção de Sólidos I

A seguir, apresentaremos a construção, portanto a existência, de alguns sólidos no espaço.

3.2.1 Pirâmides e Cones

Considere um polígono de n -lados no plano com vértices nos pontos A_1, \dots, A_n . Denotaremos o polígono por $A_1 \dots A_n$. Por um ponto V não pertencente ao plano de $A_1 \dots A_n$ traçamos os segmentos $\overline{VA_1}, \dots, \overline{VA_n}$. Obtemos os n triângulos $\Delta VA_1A_2, \dots, \Delta VA_{n-1}A_n$ e ΔVA_nA_1 que juntamente com o polígono $A_1 \dots A_n$, delimitam uma região do espaço que denominamos de pirâmide com base $A_1 \dots A_n$ e vértice V . Os segmentos $\overline{VA_1}, \dots, \overline{VA_n}$ são chamados arestas laterais, enquanto os lados do polígono são as arestas da base. Os triângulos ΔVA_iA_{i+1} , $1 \leq i \leq n$ ($A_{n+1} = A_1$) são denominados de faces laterais da pirâmide. Assim, uma pirâmide é formada pela união dos pontos pertencentes aos segmentos ligando o vértice V a um ponto da região limitada pelo polígono $A_1 \dots A_n$ (figura 3.5).

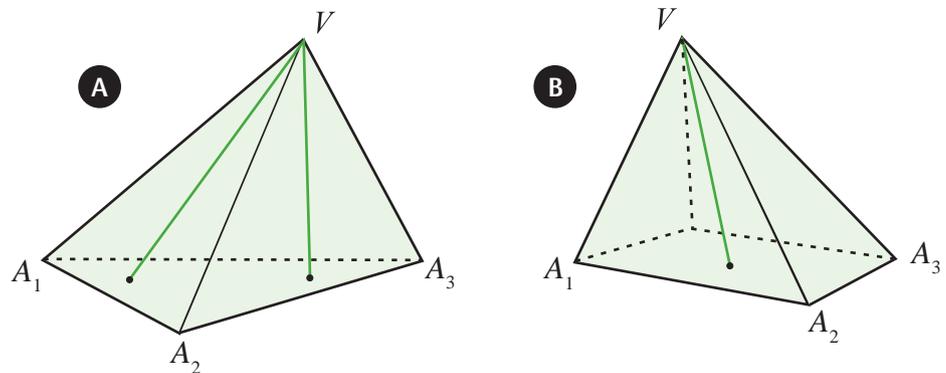


Figura 3.5 – (a) triangular (b) retangular

A altura de uma pirâmide é a distância do vértice ao plano da base e o seu apótema é o segmento ligando o vértice ao ponto médio de uma das arestas da base. Um exemplo particularmente interessante de pirâmide é quando a base é um triângulo (figura 3.5(a)), pois a base, sendo um triângulo, torna a pirâmide mais rica em simetrias.

Definição 3.11. Um tetraedro é uma pirâmide cuja base e as laterais são congruentes a um triângulo equilátero.

Ao considerarmos polígonos regulares com um número muito grande de lados somos induzidos a considerar uma pirâmide sobre uma circunferência, neste caso, denominamos a região no espaço de cone circular. Podemos construir cones sobre qualquer região plana, desde que esta seja limitada (figura 3.6).

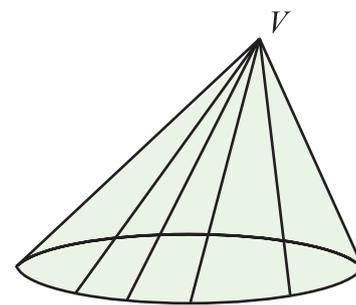


Figura 3.6

Qualquer segmento ligando o vértice V a um ponto da circunferência é chamado geratriz do cone e a união de todas as geratrizes é denominada de superfície lateral do cone.

Ao unirmos pela base $A_2 \dots A_n$ duas pirâmides P_1 e P_2 que tenham bases congruentes, obtemos um novo sólido como ilustra a figura 3.7. Quando a base da pirâmide é um quadrado e as faces são triângulos equiláteros, o sólido obtido é denominado octaedro.

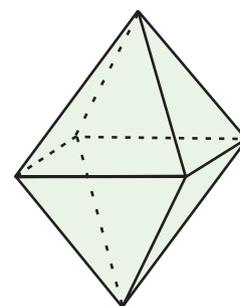


Figura 3.7

3.2.2 Prismas e Cilindros

Sejam α um plano, $A_1 \dots A_n$ um polígono em α e B_1 um ponto não pertencente a α . Por B_1 traçamos um plano β paralelo a α , o qual **existe e é único**. Pelos demais vértices A_2, \dots, A_n traçamos retas paralelas a $A_1 B_1$ que, ao cortarem o plano β , definem os pontos B_2, \dots, B_n . Por construção, as retas $A_i B_i$, $1 \leq i \leq n$ são paralelas entre si. Desta forma, os pontos A_{i-1} , A_i , B_i e B_{i-1} definem um quadrilátero que, por ter os lados opostos paralelos, é um paralelogramo. Denominamos de prisma (figura 3.8) a região do espaço limitada pelos paralelogramos $A_{i-1} A_i B_i B_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$, e os planos α e β . Os paralelogramos $A_{i-1} A_i B_i B_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$ são as faces laterais do prisma e, $A_1 \dots A_n$ e $B_1 \dots B_n$ são as bases do prisma. Os segmentos $A_i B_i$ são as arestas laterais do prisma. Chamamos atenção para a congruência dos polígonos $A_1 \dots A_n$ e $B_1 \dots B_n$ (lados congruentes e ângulos congruentes). A superfície do prisma é a união das faces laterais com a região dos polígonos das bases.

Uma seção reta do prisma é a região poligonal plana obtida ao tomarmos a interseção do prisma por um plano paralelo ao plano da base. A altura do prisma é a distância entre os planos das bases α e β .

Como você justifica esta afirmação? Será mesmo impossível encontrar dois planos que satisfaçam estas condições?

Definição 3.12.

- Um paralelepípedo é um prisma cuja base é um paralelogramo.
- Um romboedro é um paralelepípedo que possui as doze arestas congruentes entre si.

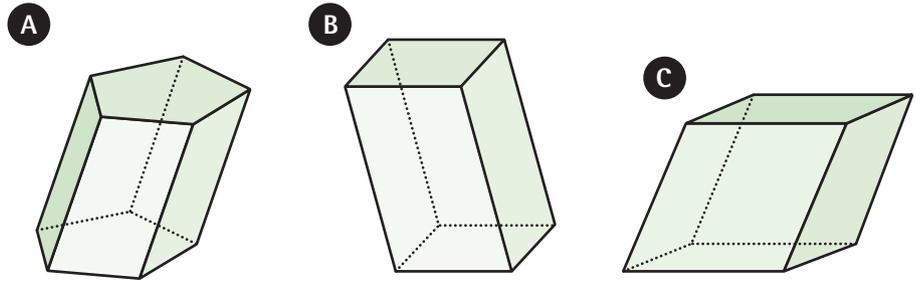


Figura 3.8 – (a) prisma, (b) paralelepípedo, (c) romboedro

Em vez de usarmos um polígono $A_1 \dots A_n$ na base, podemos usar um círculo C sobre o plano α ; sobre C marcamos o ponto A e por um ponto B , não pertencente a α , traçamos o plano β paralelo a α . O cilindro com base circular C (figura 3.9) é o conjunto dos pontos dos segmentos paralelos \overline{AB} ligando os pontos do círculo definido por C ao plano β . O segmento \overline{AB} é denominado a geratriz do cilindro. A secção mediana é a interseção do plano que contém a reta geratriz e um diâmetro do círculo da base. A superfície lateral do cilindro é a união das geratrizes e a superfície total é a união da superfície lateral com os círculos das bases.

Um tronco de prisma é um sólido obtido cortando um prisma por um plano inclinado em relação ao plano das bases (figura 3.10).

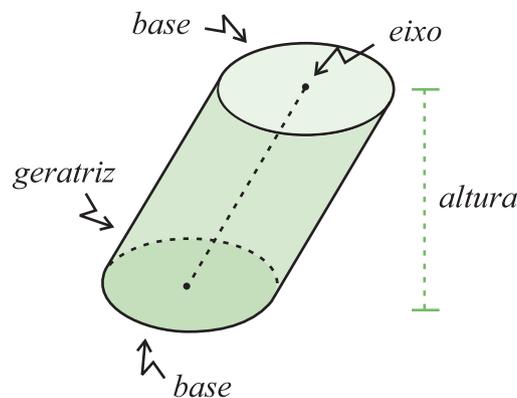


Figura 3.9

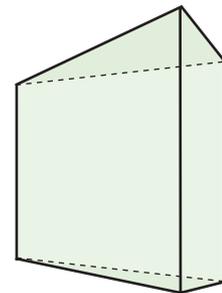


Figura 3.10

3.3 Teorema de Thales e Proporcionalidade

Na Geometria Plana, o Teorema de Thales é um resultado fundamental porque dele decorrem diversos métodos para compararmos segmentos que não são congruentes, porém são proporcionais. O Teorema de Thales tem uma versão no espaço:

Teorema 3.13. Um feixe de planos paralelos determina segmentos proporcionais sobre duas retas secantes a eles.

Demonstração. Sejam α , β e γ três planos paralelos e sejam r_1 e r_2 duas retas secantes, como indica a figura 3.11.

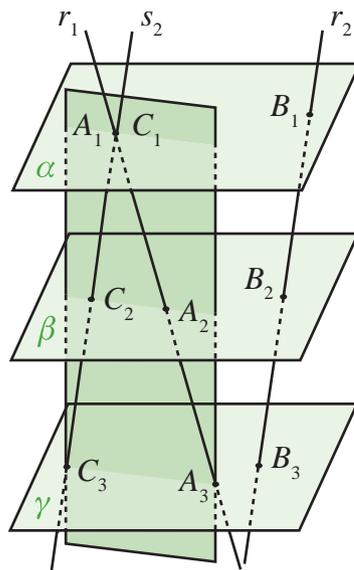


Figura 3.11

A reta r_1 encontra os planos nos pontos A_1 , A_2 e A_3 , e r_2 encontra nos pontos B_1 , B_2 e B_3 . Pelo ponto A_1 traçamos a reta s_2 paralela a r_2 , que encontra os planos β e γ nos pontos C_2 e C_3 . O plano δ , determinado pelas retas r_1 e s_2 , corta os planos β e γ segundo os segmentos $\overline{A_2C_2}$ e $\overline{A_3C_3}$. Pelo Teorema de Thales restrito ao plano δ , temos

$$\frac{A_1C_2}{A_1A_2} = \frac{C_2C_3}{A_2A_3} = \frac{A_1C_3}{A_1A_3}.$$

No entanto, $A_1C_2 = B_1B_2$, $C_2C_3 = B_2B_3$ e $A_1C_3 = B_1B_3$, da onde segue que

$$\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{B_2B_3}{A_2A_3} = \frac{B_1B_3}{A_1A_3}.$$

■

O teorema acima motiva a seguinte definição:

Definição 3.14. Seja $k \in \mathbb{R}$. Uma k -homotetia do espaço com relação a um vértice V associa a cada ponto P do espaço um ponto P' de maneira que $VP' = kVP$.

Exemplo. Seja $VA_1\dots A_n$ uma pirâmide. Por um ponto B_1 , pertencente a aresta lateral $\overline{VA_1}$ da pirâmide, traçamos um plano paralelo ao plano da base (figura 3.12) de tal maneira que $\frac{VB_1}{VA_1} = k$. As arestas VA_i , $1 \leq i \leq n$, cortam o plano nos pontos B_i . Decorre do Teorema de Thales que os triângulos ΔVB_1B_2 e ΔVA_1A_2 são semelhantes e

$$\frac{VB_1}{VA_1} = \frac{VB_2}{VA_2} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = k.$$

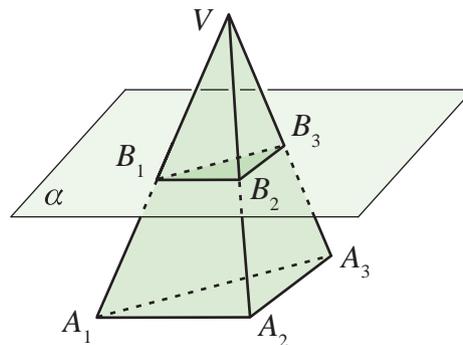


Figura 3.12

Analogamente, segue que

$$\frac{VB_2}{VA_2} = \frac{VB_3}{VA_3} = \frac{B_2B_3}{A_2A_3} = k,$$

e

$$\frac{VB_{n-1}}{VA_{n-1}} = \frac{VB_n}{VA_n} = \frac{B_{n-1}B_n}{A_{n-1}A_n} = k.$$

Portanto, a razão entre as medidas dos segmentos da pirâmide $VB_1 \dots B_n$ dividido pela medida do segmento correspondente é k , ou seja, as pirâmides são semelhantes com fator de proporcionalidade igual a k . Neste caso, dizemos que as pirâmides são homotéticas.

Para construirmos uma homotetia de uma figura no espaço, é suficiente fixarmos o vértice da homotetia e traçarmos os planos paralelos às faces da figura, de acordo com a razão de homotetia.

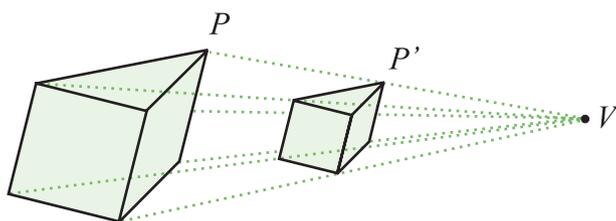


Figura 3.13

Lista de Exercícios 3

- 1) Descreva todas as possíveis posições relativas entre 3 planos.
- 2) Se três planos se encontram num único ponto, mostre que não existe uma reta que seja paralela a todos eles.
- 3) Sejam $ABCD$ um tetraedro e P um ponto sobre a aresta \overline{BD} . Mostre que, ao traçarmos por P , um plano paralelo as arestas \overline{AD} e \overline{BC} , obtemos uma secção que é um paralelogramo.
- 4) Sejam $ABCD$ e $AEFG$ tetraedros cujas bases são paralelas e suponha que as alturas do tetraedros sejam proporcionais a $k \in \mathbb{R}$. Mostre que eles são k -homotéticos.

3.4 Perpendicularismo

Na Geometria, os conceitos mais fundamentais são o de distância e o de ângulo. Com eles podemos medir e comparar os objetos geométricos. Para introduzirmos estes conceitos na geometria espacial, discutiremos o conceito de perpendicularismo para, então, reduzirmos os conceitos de distância e de ângulo no espaço a situações bidimensionais.

1) Retas perpendiculares

Duas retas concorrentes são perpendiculares se dividem o plano que as contém em quatro ângulos iguais (figura 3.14 (a)), cada um deles chamado de ângulo reto. Se as retas r e s forem reversas fixamos um ponto P sobre r e por ele conduzimos uma reta s' paralela a s . Se r e s' forem perpendiculares dizemos que r e s são ortogonais (figura 3.14(b)).

Você conseguiu perceber a diferença entre o conceito de perpendicularidade e ortogonalidade? Estes conceitos estão relacionados, mas não são idênticos. Retas perpendiculares são ortogonais, a recíproca é falsa.

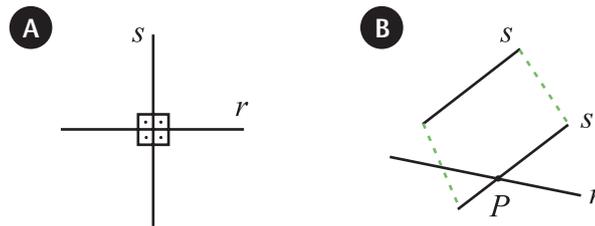


Figura 3.14

2) Retas e planos perpendiculares

Uma reta r é perpendicular a um plano α se ela é ortogonal a toda reta contida em α . A seguinte proposição dá um critério para verificarmos o perpendicularismo entre retas e planos, uma vez que é inviável testar para todas as retas contidas no plano:

Proposição 3.15. Se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Demonstração. Sejam α um plano e $r, s \in \alpha$ retas concorrentes no ponto $P \in \alpha$. Seja t uma reta perpendicular às retas r e s no ponto P . Sobre t marcamos os pontos V_1 acima do plano α e V_2 abaixo do plano α (figura 3.15) de maneira que $PV_1 = PV_2$. Sobre

a reta r marcamos o ponto A e sobre a reta s o ponto B . Decorre da construção que os seguintes casos de congruência:

- 1) $\Delta PAV_1 \cong \Delta PAV_2$ (LAL),
- 2) $\Delta PBV_1 \cong \Delta PBV_2$ (LAL).

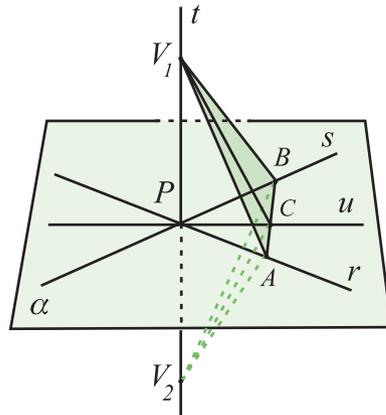


Figura 3.15

Por causa disto, $AV_1 = AV_2$ e $BV_1 = BV_2$. Agora, consideramos uma reta u qualquer, contida em α e distinta de r e de s . Vamos mostrar que t é perpendicular a u . Ao traçarmos o segmento \overline{AB} obtemos o ponto C , na interseção da reta u com o segmento \overline{AB} , e os triângulos congruentes $\Delta ABV_1 \cong \Delta ABV_2$ (LLL). Decorre que os ângulos $V_1\hat{A}C$ e $V_2\hat{A}C$ são iguais e, por isto, os triângulos ΔV_1AC e ΔV_2AC também são congruentes (LAL). Conseqüentemente, $V_1C = V_2C$. Finalmente, concluímos que os triângulos ΔV_1PC e ΔV_2PC são congruentes e, uma vez que

$$V_1\hat{P}C + V_2\hat{P}C = \pi, \quad V_1\hat{P}C = V_2\hat{P}C,$$

$$\text{segue que } V_1\hat{P}C = V_2\hat{P}C = \frac{\pi}{2}.$$

Para terminar, basta observar que qualquer reta em α pode ser conduzida por P , por isto é ortogonal a t . ■

Lista de Exercícios 4

Em cada um dos itens que segue, escreva os argumentos e faça as figuras que justificam as seguintes construções:

- 1) Sejam P e Q dois pontos exteriores ao plano α . Sejam r_p e r_q as retas perpendiculares a α traçadas por P e Q , respectivamente. Mostre que r_p e r_q são paralelas.
- 2) Construa um plano perpendicular a uma reta.
- 3) Construa uma reta perpendicular a um plano.

3.4.1 Construção de Sólidos II

Com o conceito de perpendicularismo podemos construir casos particulares dos sólidos anteriormente construídos.

1) Pirâmides regulares

Considere que o polígono $A_1 \dots A_n$, contido no plano α , seja regular. Sobre o incentro do polígono levante uma reta r perpendicular a α e marque o vértice V . A pirâmide $VA_1 \dots A_n$ é regular porque as arestas laterais são todas congruentes. Assim, as faces laterais são os triângulos isósceles $VA_{i-1}A_i$, $1 \leq i \leq n$. Um caso particularmente interessante é a construção de um tetraedro (figura 3.16). Neste caso, começamos com a base sendo um triângulo equilátero ΔABC de lado l . Pelo incentro O de ΔABC levantamos uma perpendicular e, sobre ela, marcamos o ponto D de maneira que $AD = AB$. No triângulo ΔOAD temos que:

- a) ele é retângulo,
- b) $OA = l \frac{\sqrt{3}}{3}$, $OD = l \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Conseqüentemente, $BD = CD = AD = l$. Ou seja, os triângulos das faces laterais e o da base são todos congruentes.

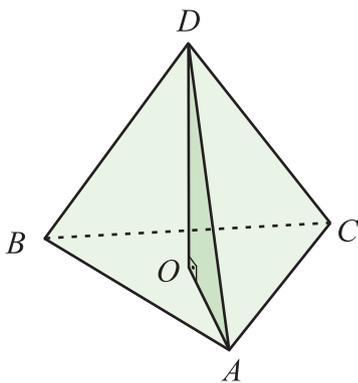


Figura 3.16

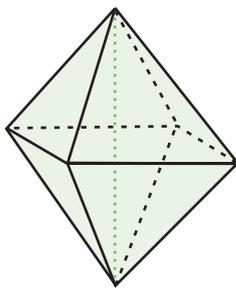


Figura 3.17

2) Octaedro regular

Ao identificarmos pela base duas pirâmides regulares, como ilustra a figura 3.16, tendo como base um quadrado, obtemos o octaedro regular (figura 3.17).

3) Prismas retos

Ao construirmos um prisma com base num polígono $A_1 \dots A_n$, contido no plano α , traçamos por A_1 uma reta perpendicular a α e marcamos o ponto B_1 . Seja β o plano paralelo a α passando por B_1 . Traçamos por cada um dos vértices A_i uma reta paralela a $\overline{A_1 B_1}$ e marcamos o ponto B_i de encontro com o plano β . O prisma obtido (figura 3.18) é denominado prisma reto por ter suas faces laterais perpendiculares a sua base $A_1 \dots A_n$.

Se a base é um paralelogramo, dizemos que o prisma obtido é um paralelepípedo retangular. Dentre os paralelepípedos retangulares destacamos o cubo cujas faces são todas congruentes a um quadrado.

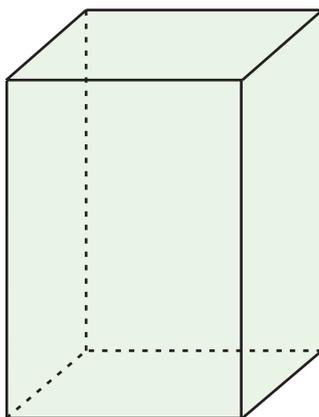


Figura 3.18

Lista de Exercícios 5

- 1) No cubo $ABCDEFGH$, seja α o plano contendo a interseção das diagonais \overline{AG} e \overline{BH} e perpendicular a \overline{AG} . Mostre que a interseção de α com as laterais define um hexágono regular.
- 2) Num octaedro, encontre um hexágono regular definido por uma seção plana.

3.5 Projeções Ortogonais

Dados um plano α e um ponto P , podemos projetar P sobre α através do seguinte procedimento:

- 1) trace por P a reta r perpendicular a α ,
- 2) seja P' o ponto da interseção de r com α ,
- 3) defina P' como sendo a projeção ortogonal de P sobre α (figura 3.19).

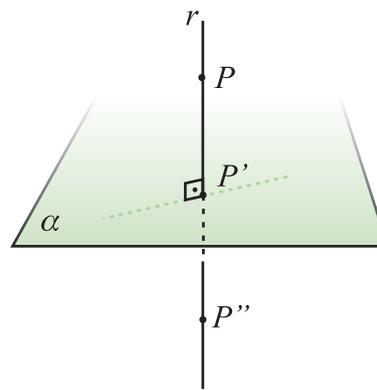


Figura 3.19

No caso em que P pertence a α temos $P' = P$. Além disto, se P e Q estão sobre a mesma reta perpendicular a α , então $P' = Q'$.

Munidos da projeção ortogonal P' do ponto P sobre o plano α , podemos definir o ponto P'' simétrico de P em relação a α :

- 4) conduzimos a reta PP' além do plano α ,
- 5) marcamos sobre PP' o ponto P'' , de maneira que P' esteja entre P e P'' , e $PP'' = 2PP'$.

Dizemos que P'' é a reflexão ortogonal de P sobre o plano α .

Se designarmos por \mathbb{R}^3 o conjunto dos pontos do espaço, a reflexão ortogonal define uma função $\mathfrak{R}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com as seguintes propriedades:

- a) $\mathfrak{R}(P) = P$, para todo $P \in \alpha$;
- b) $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}$ é a identidade.

Uma aplicação importantíssima da projeção ortogonal é a construção de um sistema de coordenadas tridimensionais. Seja α um plano e O um ponto marcado sobre α . Por O traçamos as retas perpendiculares OX e OY contidas em α . A seguir, construímos a reta OZ perpendicular a α . Desta forma, as retas OX , OY e OZ são perpendiculares entre si e concorrem no ponto O . Pelo axioma da Geometria Plana, ao marcarmos em O o marco zero (a origem), podemos identificar cada um dos pontos sobre as retas OX , OY e OZ com um número real (figura 3.20).

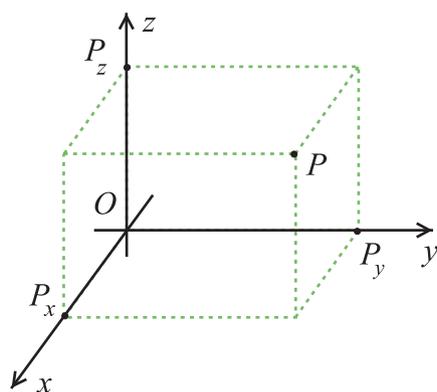


Figura 3.20

Seja P um ponto do espaço \mathbb{R}^3 e sejam P_x , P_y e P_z as projeções ortogonais de P sobre as retas OX , OY e OZ , respectivamente. Ao associarmos a cada um destes pontos obtidos os números

$$x_p = OP_x, \quad y_p = OP_y, \quad z_p = OP_z,$$

o ponto P fica determinado no espaço pela tríade (x_p, y_p, z_p) . Daí, os pontos do espaço são identificados com o conjunto:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Observamos que $O = (0, 0, 0)$. O sistema de coordenadas obtido é chamado de sistema coordenado xyz ou sistema coordenado cartesiano. O plano gerado pelas retas OX e OY é denominado plano- xy ; analogamente, OX e OZ geram o plano- xz , e OY e OZ geram o plano- yz . As retas OX , OY e OZ são denominadas eixo- x , eixo- y e eixo- z , respectivamente. Os eixos juntos formam o sistema de coordenadas.

Lista de Exercícios 6

1) Marque se é falsa ou verdadeira cada uma das afirmações abaixo:

- () Não existem no espaço 4 retas mutuamente reversas.
- () Duas retas distintas e ortogonais a uma terceira reta são paralelas entre si.
- () Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é paralela a toda reta perpendicular ao plano.
- () Dados uma reta r e um plano α existe um plano perpendicular a α contendo r .
- () Se os planos α e β são perpendiculares, então as retas $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ são ortogonais.

2) Seja $ABCDEFGH$ um cubo.

- a) Mostre que os planos diagonais $ABGH$ e $CDEF$ são perpendiculares.
- b) Mostre que o sólido que tem por vértices os centros das faces de $ABCDEFGH$ é um octaedro.
- c) Descreva o sólido P cujos vértices são os pontos médios das arestas do cubo. Mostre que a interseção do sólido P com um plano contendo duas das suas arestas paralelas define ou um quadrado ou um hexágono regular.

3) Seja $ABCD$ um tetraedro.

- a) Mostre que as arestas reversas são ortogonais.
- b) Mostre que o sólido que tem por vértices os centros das faces de $ABCD$ é um tetraedro.
- c) Descreva o sólido P cujos vértices são os pontos médios das arestas de $ABCD$. Mostre que a interseção do sólido P com um plano contendo duas das suas arestas paralelas define um quadrado.

3.6 Distância

Como dissemos anteriormente, na Geometria os conceitos mais fundamentais são distância e ângulo; eles nos permitem calcular comprimento, áreas e volumes. Para defini-los no espaço usaremos os conceitos já definidos no plano.

3.6.1 Distância entre Pontos

No plano, a distância entre dois pontos P e Q é determinada usando o Teorema de Pitágoras. Para isto, utilizamos as projeções ortogonais dos pontos sobre dois eixos perpendiculares. No espaço, a distância é determinada de maneira análoga: fixamos um sistema de coordenadas xyz e projetamos sobre os eixos cada um dos pontos P e Q , associando a cada um uma tríade (figura 3.21).

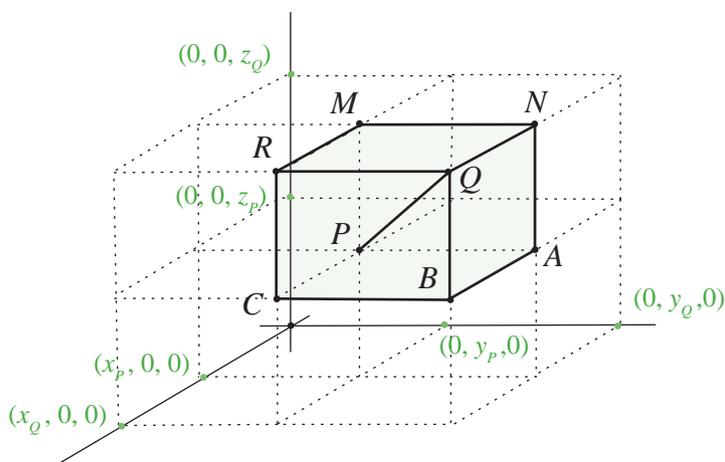


Figura 3.21

$$P \mapsto (x_p, y_p, z_p), \quad Q \mapsto (x_q, y_q, z_q).$$

Ao fixarmos um sistema coordenado no espaço, dois pontos determinam um paralelepípedo reto. A distância entre os pontos é o comprimento da diagonal do paralelepípedo. Acompanhe a figura 3.21:

- 1) As bases do paralelepípedo regular são os retângulos $PABC$ e $MNQR$. O retângulo $PABC$ pertence ao plano (paralelo ao plano- xy) definido pela equação $z = z_p$, e o retângulo $MNQR$ pertencente ao plano $z = z_q$.

2) Os vértices de $PABC$ são

$$P = (x_p, y_p, z_p), A = (x_p, y_Q, z_p),$$

$$B = (x_Q, y_Q, z_p), C = (x_Q, y_p, z_p).$$

E, os vértices de $MNQR$ são

$$M = (x_p, y_p, z_Q), N = (x_p, y_Q, z_Q),$$

$$Q = (x_Q, y_Q, z_Q), R = (x_Q, y_p, z_Q).$$

3) O triângulo ΔPBQ é retângulo com hipotenusa medindo PQ . Assim,

$$PQ^2 = PB^2 + BQ^2. \quad (3.1)$$

4) O triângulo ΔPAB é retângulo com hipotenusa PB e catetos PA e AB ;

$$PB^2 = PA^2 + AB^2. \quad (3.2)$$

Decorre das identidades 3.1 e 3.2 que

$$PQ^2 = PA^2 + AB^2 + BQ^2.$$

Como $AB = PC$ e $BQ = PM$, segue que

$$PQ^2 = PA^2 + PC^2 + PM^2. \quad (3.3)$$

Portanto, o quadrado da distância de P a Q é igual a soma dos quadrados dos lados do paralelogramo regular determinado por P e Q . Em termos das coordenadas de cada um dos pontos,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_Q)^2 + (y_p - y_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2}. \quad (3.4)$$

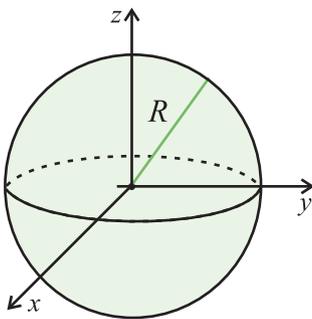


Figura 3.22

Definição 3.16. Seja P um ponto fixo no espaço. A esfera $S_R(P)$ de raio R centrada em P é o conjunto dos pontos que distam R de P . Se $P = (0, 0, 0)$, então (figura 3.22)

$$S_R(P) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Lista de Exercícios 7

- 1) Descreva os seguintes conjuntos:
 - a) O conjunto dos pontos do espaço que são eqüidistantes de dois pontos P e Q (este conjunto é denominado plano mediador).
 - b) O conjunto dos pontos do espaço que são eqüidistantes dos pontos M , P e Q .
 - c) O conjunto dos pontos do espaço que são eqüidistantes de 4 pontos.
- 2) Mostre que a soma dos quadrados das distâncias de um ponto qualquer aos oito vértices de um paralelepípedo é igual a oito vezes o quadrado da distância deste ponto ao ponto de interseção das diagonais mais a metade da soma dos quadrados das diagonais.
- 3) Mostre que, se as diagonais de um paralelepípedo forem iguais, então o paralelepípedo é retângulo.
- 4) Mostre que a soma das distâncias dos vértices de um paralelepípedo a um plano que não o intercepta é igual a oito vezes a distância do ponto de interseção de suas diagonais a este plano.
- 5) Mostre que a soma dos quadrados das projeções de um segmento de reta sobre três planos mutuamente perpendiculares é igual ao dobro do quadrado deste segmento.
- 6) Mostre que o quadrado da área de uma superfície plana é igual à soma dos quadrados das áreas de suas projeções sobre três planos perpendiculares entre si.
- 7) Num tetraedro $ABCD$ encontrar o ponto M cuja soma dos quadrados das distâncias aos quatro vértices seja mínima.

3.6.2 Distância de um Ponto ao Plano

Dado um ponto P e um plano α , podemos estabelecer um sistema de coordenadas xyz tal que o plano xy seja o próprio α e $P \in OZ$. Sendo $O = (0, 0, 0)$ a origem, temos que a distância de $P = (0, 0, c)$ a qualquer ponto $Q = (x, y, z) \in \alpha$ é

$$[d(P, Q)]^2 = x^2 + y^2 + (z - c)^2. \quad (3.5)$$

Portanto,

$$d(P, Q) \geq |z - c|$$

e a igualdade acontece se, e somente se, o ponto Q encontra-se sobre a reta OZ ($Q = (0, 0, z)$). Por isto, a distância de P ao plano α é o comprimento do segmento OP , onde O é a interseção da reta perpendicular a α traçada pelo ponto P (figura 3.23).

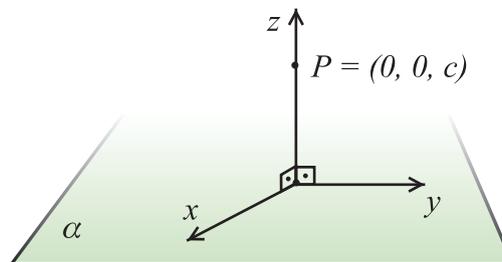


Figura 3.23

Lista de Exercícios 8

Calcule cada item em função do lado l .

- 1) No tetraedro $ABCD$, a distância do vértice A ao plano dos pontos BCD .
- 2) No cubo $ABCDEFGH$, a distância do vértice A ao plano da face oposta.
- 3) Num octaedro, a distância de um vértice ao plano da face oposta.

3.6.3 Distância de um Ponto à Retra

Seja α o plano determinado pelo ponto P e pela reta r . A distância de P a r é o comprimento do segmento PP' , onde o ponto P' é a interseção da única reta contida em α e perpendicular a r traçada por P (figura 3.24).

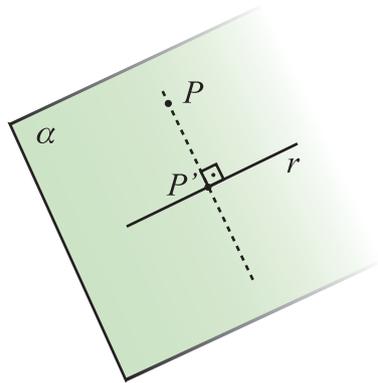


Figura 3.24

Exemplo. Nos seguintes exemplos veremos como calcular a distância de um ponto a uma reta:

- 1) Considere um tetraedro $ABCD$ de lado l , como ilustra a figura 3.25. A distância de B à aresta \overline{CD} é dada pelo comprimento da altura do triângulo $\triangle BCD$.

Como as faces são triângulos eqüiláteros, segue que a distância procurada é a altura da face, por isto

$$d = (B, \overline{CD}) = l \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- 2) Considere um cubo $ABCDEFGH$ de lado l , como ilustra a figura 3.26. Na figura observamos que algumas arestas eqüidistam do vértice A ;

$$d(A, \overline{AB}) = d(A, \overline{AD}) = d(A, \overline{AE}) = 0, \quad d(A, \overline{BC}) = d(A, \overline{CD}) = l,$$

$$d(A, \overline{EH}) = d(A, \overline{HD}) = l, \quad d(A, \overline{BF}) = d(A, \overline{FE}) = l,$$

$$d(A, \overline{GC}) = d(A, \overline{GF}) = l\sqrt{2}.$$

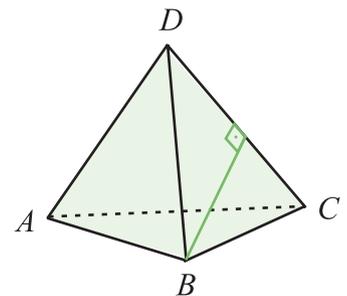


Figura 3.25

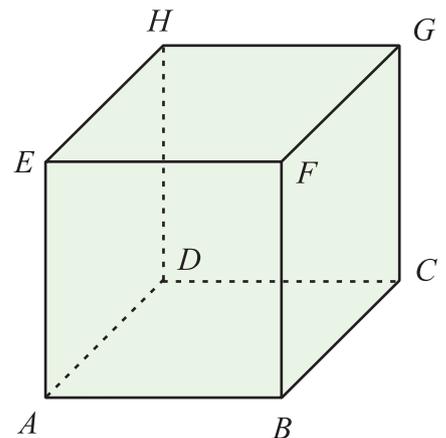


Figura 3.26

Lista de Exercícios 9

Antiprisma

Poliedro constituído por duas faces poligonais iguais e paralelas chamadas directrizes, ligados por triângulos. O número de lados dos polígonos das faces directrizes define o nome do antiprisma. Três faces antiprisma triangular etc. O número de triângulos é número de lados das faces directrizes multiplicado por dois.

(Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Antiprisma>>). *Entre no endereço da fonte e veja a figura!*

Determine as seguintes distâncias:

- 1) De um vértice de um antiprisma de altura h cuja base hexagonal tem um lado medindo l , até o vértice adjacente na base oposta (ver p. 198).
- 2) De um dos vértices à face oposta no octaedro, no dodecaedro e do icosaedro.
- 3) De um vértice do cubo ao hexágono regular obtido pela interseção do plano perpendicular a diagonal definida pelo vértice e pelo ponto de interseção das diagonais.
- 4) Do vértice A do cubo $ABCDEFGH$ ao plano definido pelos vértices BCF adjacentes a A .

3.6.4 Distâncias entre Retas Reversas

Os casos anteriores de determinação de distância são casos particulares da seguinte definição:

Definição 3.17. Sejam X_1 e X_2 dois subconjuntos do espaço. A distância $d(X_1, X_2)$ entre X_1 e X_2 é igual ao comprimento do menor segmento que tem um extremo em X_1 e outro em X_2 .

Quando duas retas são paralelas elas são coplanares e a distância entre elas é constante e igual ao comprimento de um segmento perpendicular a ambas. Isto se repete no espaço. No entanto, no espaço temos o caso das retas reversas. Para tratarmos o caso reverso construiremos um segmento que é perpendicular às duas reversas r e s , e cujo comprimento é a distância entre elas (figura 3.27):

- 1) Sejam α e β planos paralelos tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$. Para construir os segmentos, fixamos um ponto $P \in r$ e conduzimos s por P para obtermos a reta s' . Da mesma maneira, fixamos um ponto $Q \in s$ pelo qual conduzimos uma reta r' . Assim, o par (r, s') gera o plano α e o par (r', s) gera o plano β .

- 2) Sobre o plano α marcamos o ponto A e, por A , traçamos a reta t perpendicular a α . Seja B o ponto de interseção de t com o plano β .
- 3) Por B conduzimos a reta r' paralela a r . Observamos que r' é perpendicular a t . Seja C o ponto de interseção de r' com s .
- 4) Por C traçamos uma perpendicular ao plano β que encontra o plano α no ponto D .
- 5) O quadrilátero $ABCD$ é um retângulo, pois as retas r e r' são paralelas.

Portanto, o segmento \overline{CD} corta as retas r e s , e é perpendicular a ambas. Ou seja, $d(r, s) = CD$.

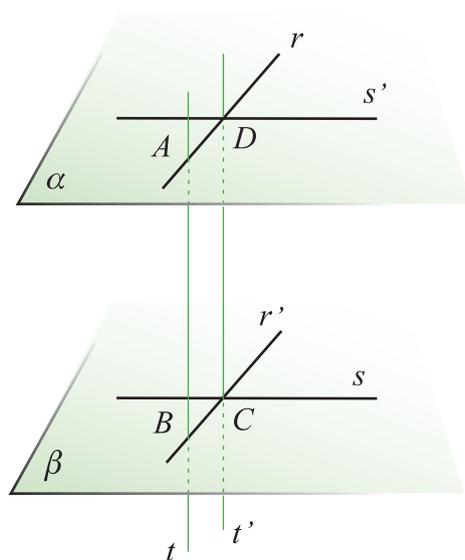


Figura 3.27

Lista de Exercícios 10

- 1) Determine a distância entre as arestas opostas num tetraedro.
- 2) Seja $ABCDEFGH$ um cubo como na figura 3.26. Determine a distância entre as arestas:
 - a) \overline{AB} e \overline{GH} , b) \overline{AB} e \overline{CG} , c) \overline{AB} e \overline{CD} .
- 3) Determine a distância entre as arestas opostas de um octaedro.

3.7 Ângulos

Você pode retomar o conceito de ângulo no Capítulo 2 de seu livro de Geometria I.

Nesta seção, introduziremos o conceito de ângulo no espaço. No entanto, observamos que um ângulo é um objeto geométrico essencialmente planar; no espaço existem o diedro e o triedro.

3.7.1 Ângulo entre Retas

Dadas duas retas r e s no espaço, é fácil definirmos o ângulo entre elas de acordo com a posição relativa de ambas:

- r e s são concorrentes, logo são coplanares: o ângulo entre elas é o mesmo definido na geometria plana.
- r e s são reversas: neste caso, fixamos um ponto P sobre r e conduzimos por P uma reta s' paralela a s . Assim, r e s' são coplanares e definem um ângulo. O ângulo entre r e s (figura 3.28) é definido como sendo o ângulo formado pelas retas r e s' .

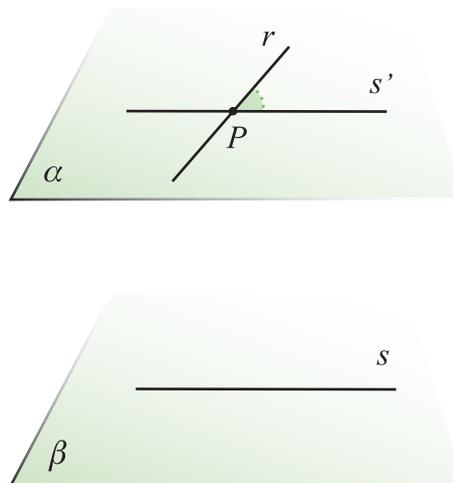


Figura 3.28

3.7.2 Ângulo entre Planos. Diedros e Triedros

Sejam α e β dois planos secantes e r a reta na interseção dos planos. Sejam s uma perpendicular a r no plano α e t uma reta perpendicular a r no plano β . O ângulo formado pelos planos α e β é definido como sendo o ângulo formado pelas retas s e t (figura 3.29)

Uma outra maneira de estabelecer o ângulo entre dois planos é fixarmos um ponto A exterior a ambos os planos α e β . Por A traçamos a reta s' perpendicular a α e também a reta t' perpendicular a β . A medida do ângulo formado pelos planos α e β é igual à medida do ângulo entre as retas t' e s' , conforme ilustra a figura 3.30. Juntamente com as retas s e t definidas anteriormente, as retas t' e s' definem um quadrilátero convexo com dois ângulos retos, de onde os outros ângulos são suplementares.

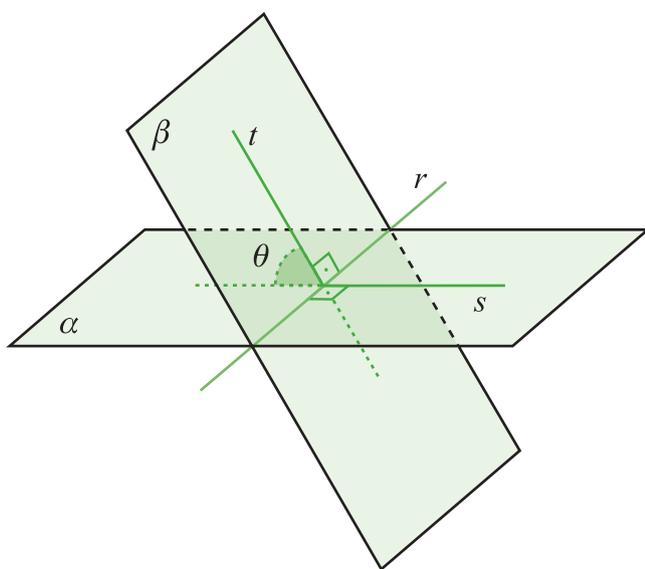


Figura 3.29

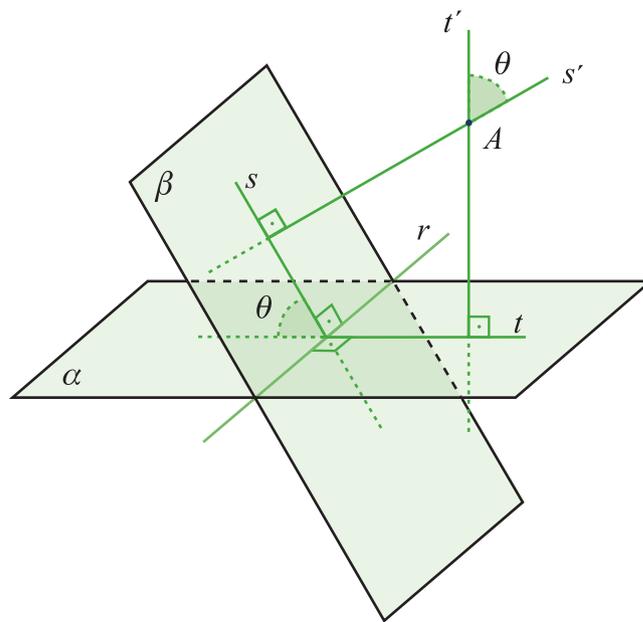


Figura 3.30

Sendo assim, o ângulo formado pelas retas s' e t' é igual ao ângulo formado pelas retas s e t .

Na geometria plana, duas retas dividem o plano em quatro regiões que denominamos de ângulos, sendo que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes. A medida do ângulo entre as retas no plano é definida como a menor das medidas dos ângulos formados pelas retas. No espaço ocorre situação análoga; dois planos α e β dividem o espaço em quatro regiões que denominamos diedros formados por α e por β . Os semiplanos que limitam um diedro são denominados faces do diedro (figura 3.31) e a reta na interseção dos semiplanos é a aresta do diedro. Para medirmos um diedro, procedemos da mesma forma utilizada para obter o ângulo entre dois planos. Desta forma, a medida de cada um dos diedros está entre 0° e 180° . O ângulo

entre dois planos secantes é igual à medida do menor diedro formado por eles.

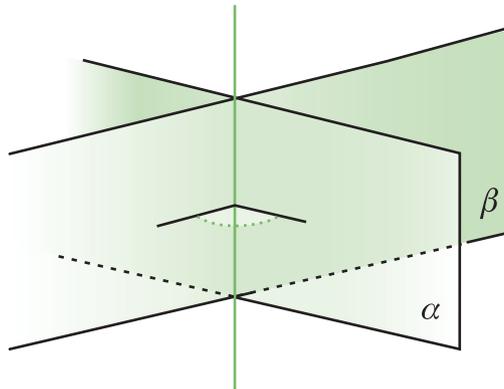


Figura 3.31

Quando a interseção de três planos é um ponto, os planos dividem o espaço em 8 partes que denominamos de triedros, conforme mostra a figura 3.32:

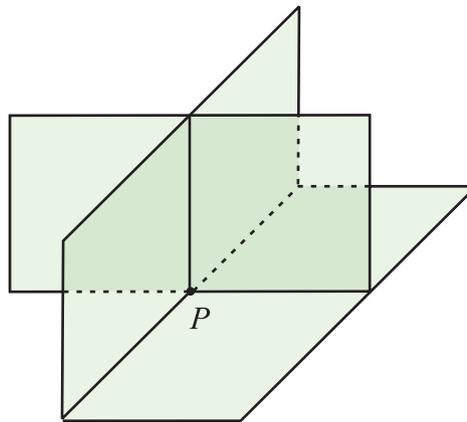


Figura 3.32

Lista de Exercícios 11

Nos itens abaixo, mostre que:

- 1) a soma dos diedros formados pelas faces laterais de um prisma triangular com uma de suas bases, está compreendida entre $[\pi, 2\pi]$;
- 2) a soma dos diedros formados pelas faces laterais de um prisma convexo de n faces com uma de suas bases, é superior a π e inferior a $2(n-1)\frac{\pi}{2}$;

- 3) a soma dos diedros de um tetraedro é superior a 2π e inferior a 3π ;
- 4) a soma dos diedros de uma pirâmide cuja base é um polígono convexo de n lados é superior a $2(n-1)\frac{\pi}{2}$ e inferior a $2(2n-3)\frac{\pi}{2}$.

3.7.3 Ângulo entre Reta e Plano

Suponhamos que o plano α e a reta r sejam secantes e $\alpha \cap r = \{O\}$. Seja $P \in r$ um ponto qualquer e $P' \in \alpha$ a projeção ortogonal de P sobre α .

Definição 3.18. O ângulo entre o plano α e a reta r é o ângulo formado pelos segmentos \overline{OP} e $\overline{OP'}$.

O ângulo está bem definido, pois se tomarmos um ponto $Q \in r$ distinto de P , as retas $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ (Q' é a projeção ortogonal de Q sobre α) são paralelas e os triângulos $\Delta OPP'$ e $\Delta OQQ'$ são semelhantes.

Exemplo. Um exemplo muito interessante, emprestado de Carvalho; Lima; Wagner e Morgado (2002), é o seguinte: Considere a planta do telhado de uma casa conforme ilustra a figura 3.33. O telhado é composto de 4 águas (cada porção plana do telhado é denominada uma água) e ao longo da interseção de duas águas corre uma calha. No projeto, cada água está inclinada 30° em relação ao plano horizontal. O problema é determinar a inclinação em relação à horizontal da calha AM assinalada na figura sabendo que a lateral AB do telhado mede $2a$ e que $RP = RQ = a$.

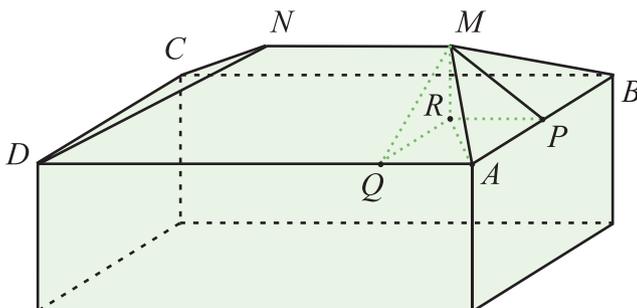


Figura 3.33

Construa uma figura que represente esta situação e verifique a discussão seguinte feita sobre a definição.

Seja θ o ângulo que queremos calcular. Segue da figura que

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{MR}{AR}.$$

No entanto, temos que

$$MR = QR \cdot \operatorname{tg}(30^\circ), \quad QR = a \Rightarrow MR = a \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Conseqüentemente,

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{a \frac{\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

da onde segue que $\theta = 22^\circ 2'$.

Lista de Exercícios 12

Mostre que:

- 1) Em um tetraedro os pés das alturas são ortocentros das faces.
- 2) Se num tetraedro o pé de uma altura for ortocentro da face correspondente, então este tetraedro terá arestas opostas ortogonais.

3.8 A Esfera

Na definição 3.16, definimos a esfera $S_R(P)$ como sendo o conjunto dos pontos que equidistam R (raio da esfera) do ponto P (centro da esfera). A esfera ocupa no espaço a mesma importância que o círculo ocupa no plano. Mas a importância dela vai além da geometria, tendo em vista que o nosso planeta Terra é quase uma esfera.

Os pontos que distam menos do que R de P são considerados pontos interiores a $S_R(P)$, enquanto os que distam mais do que R são os pontos exteriores. Ao tomarmos um plano α , existem três possibilidades para a posição relativa de α e $S_R(P)$:

- A distância de α a P é maior do que R . Neste caso, todos os pontos do plano são exteriores e ele não encontra a esfera $S_R(P)$ (figura 3.34(a));
- A distância de α a P é R . Assim, a interseção de α e $S_R(P)$ é um único ponto, uma vez que a distância de P a qualquer outro ponto pertencente ao plano é maior do que R . Seja $Q = \alpha \cap S_R(P)$, dizemos que o plano α é tangente à esfera $S_R(P)$ no ponto Q (figura 3.34(b)).
- A distância de α a P é menor do que R . Neste caso, o plano corta a esfera em dois pedaços que denominamos, cada um deles, de calota esférica. Sejam Q o ponto de α mais próximo de P e $d = d(P, Q)$ a distância de P a α (figura 3.34(c));

Se M é um ponto na interseção de α com $S_R(P)$, então a distância de M a Q é

$$d(M, Q) = \sqrt{R^2 - d^2}. \quad (3.6)$$

Reciprocamente, se a distância de um ponto M a Q é dada pela expressão 3.6, então a distância de M a P é $d(M, P) = R$, ou seja, $M \in S_R(P)$. Portanto, todo ponto pertencente ao plano α distando $d' = \sqrt{R^2 - d^2}$ do ponto Q pertence a esfera $S_R(P)$ e, conseqüentemente, a interseção do plano α com $S_R(P)$ é um círculo de raio d' .

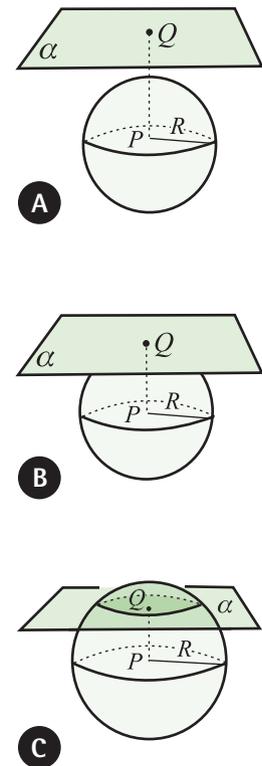


Figura 3.34

A posição relativa entre uma reta r e uma esfera pode ser deduzida do que foi descrito com relação à posição da esfera relativa a um plano (figura 3.35):

- a) Se r está contida num plano exterior a $S_R(P)$, então a interseção de r com $S_R(P)$ é vazia (figura 3.35(a)).
- b) Se r está contida num plano α tangente a $S_R(P)$ e contém o ponto Q de tangência de α a $S_R(P)$, dizemos que r é tangente a $S_R(P)$ no ponto Q . Se $Q \notin r$, então r é exterior a esfera (figura 3.35(b)).
- c) Se r está contida num plano que intersecta $S_R(P)$, então existem três possibilidades:
 - i) r intersecta $S_R(P)$ em dois pontos se $d(r, P) < R$ (neste caso, dizemos que r é secante a $S_R(P)$);
 - ii) r intersecta $S_R(P)$ em um único ponto se $d(r, P) = R$ (neste caso, dizemos que r tangencia $S_R(P)$);
 - iii) r não intersecta $S_R(P)$ se $d(r, P) > R$.

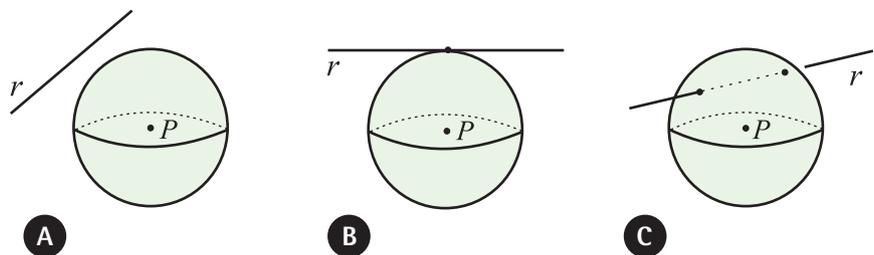


Figura 3.35

Definição 3.19. Seja P um sólido:

- 1) uma esfera é inscrita a P se ela é tangente a todas as faces de P ;
- 2) uma esfera é circunscrita a P se ela contém todos os vértices de P ;
- 3) uma esfera é tangente às arestas de P se ela tangencia todas as arestas de P .

Exemplos.

- 1) Seja $ABCDEFGH$ um cubo de lado l (figura 3.36).
- o raio da esfera inscrita é metade do lado: $R_i = \frac{l}{2}$;
 - o raio da esfera circunscrita é metade da diagonal principal: $R_c = l \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 - o raio da esfera tangente às arestas é metade da diagonal de uma face: $R_a = l \frac{\sqrt{2}}{2}$.

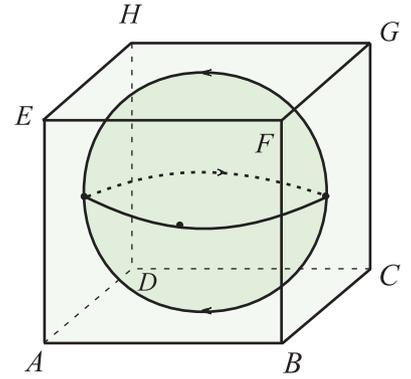


Figura 3.36

- 2) Seja $ABCD$ um tetraedro de lado l (figura 3.37(a)).

a) Raio da esfera circunscrita

Pelo que vimos, o centro tem que estar sobre a reta que liga um vértice ao incentro da face oposta, seja E o incentro do $\triangle BCD$; no caso do tetraedro, esta reta coincide com a altura relativa a face. Sejam F o centro da esfera circunscrita, R_c o raio, $\alpha = \widehat{ABE}$ e $\beta = \widehat{BAE}$ os ângulos indicados na figura 3.37(c); observamos que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. De acordo com a lei dos cossenos, aplicada ao $\triangle BFA$, temos:

$$l^2 = 2R_c^2 - 2R_c^2 \cos(\pi - 2\beta) = 2R_c^2 [1 + \cos(2\beta)].$$

Ao aplicarmos a identidade $2\cos^2(\beta) = 1 + \cos(2\beta)$ e a proposição 1.6, segue que

$$R_c = \frac{l}{2\operatorname{sen}(\alpha)}.$$

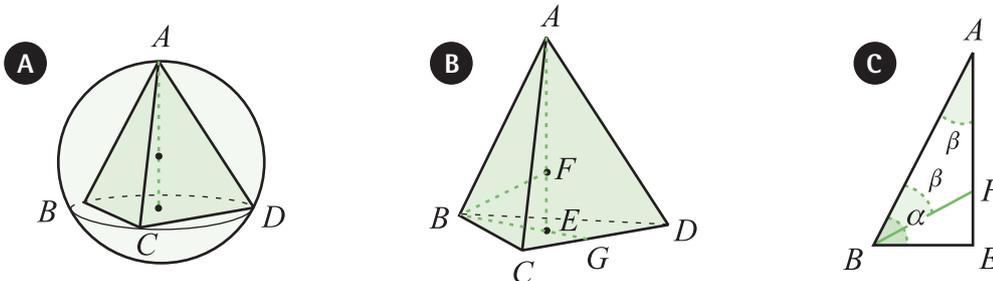


Figura 3.37

Na figura 3.37(b) temos as seguintes relações:

$$BG = l \frac{\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} BE = \frac{2}{3} BG = l \frac{\sqrt{3}}{3} \\ EG = \frac{1}{3} BG = l \frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases} \Rightarrow AE = \frac{l\sqrt{6}}{3}.$$

Sendo assim,

$$\cos(\alpha) = \frac{BE}{l} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Substituindo, obtemos

$$R = l \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Desta forma, a relação entre o raio da esfera circunscrita e a altura do tetraedro é $R_c = \frac{3}{4} AE$. Conseqüentemente, a distância do centro F da esfera ao plano da base é $\frac{1}{4}$ da medida da altura.

b) Centro da esfera inscrita

No caso anterior, também calculamos o raio da esfera inscrita, pois o incentro deve ser o ponto F e o raio FE .

Portanto, $R_i = l \frac{\sqrt{6}}{12}$.

c) Centro da esfera tangente às arestas

Para determinarmos o raio R_a basta observarmos na figura 3.37(b) que o triângulo $\triangle FEG$ é retângulo e $R_a = FG$:

$$FG^2 = FE^2 + EG^2 \Rightarrow R_a = l \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Lista de Exercício 13

- 1) Determine o raio das esferas inscritas e circunscritas aos seguintes sólidos: cubo, tetraedro, octaedro, icosaedro e dodecaedro.

- 2) Nos itens abaixo, determine, em função da medida da aresta do cubo, uma esfera (raio e centro) tal que:
- seja circunscrita a um cubo e inscrita a um octaedro.
 - seja inscrita a um cubo e circunscrita a um octaedro.
 - seja inscrita a um cubo e tangente às arestas de um tetraedro.
- 3) Determine o raio das esferas inscritas e circunscritas a um prisma e a um antiprisma cuja altura é h e a base, um hexágono regular de lado l .
- 4) Determine o raio de uma esfera inscrita a um cone reto cuja base tem raio a e a geratriz mede b .
- 5) Mostre que quando a esfera de raio R está circunscrita a um cone reto de altura h e raio da base r , temos $R_a = \frac{1}{2} \left(h + \frac{r^2}{h} \right)$ e a geratriz mede $g = \sqrt{2Rh}$.
- 6) Se a geratriz de um cone reto mede 8 e o raio da base mede 3, calcule o raio da esfera circunscrita ao cone.

3.9 Áreas e Volumenes

Para definirmos o volume de um sólido, precisamos estabelecer um volume padrão, pois o volume em si é a comparação da “quantidade de espaço” por ele ocupado com o volume padrão estabelecido. Quando definimos a área de uma região plana, o padrão é a área do quadrado de lado 1. Analogamente, o volume padrão é o volume do cubo de lado 1, chamado cubo unitário. Como as dimensões do cubo de lado 1 são comprimento = 1, altura = 1 e profundidade = 1, denotamos o cubo por $P(1,1,1)$ e o seu volume por $V(1,1,1)$. Assumimos que

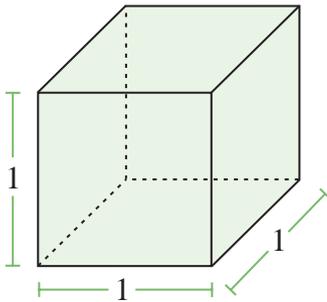


Figura 3.38

$$V(1,1,1) = 1.$$

A idéia de calcular o volume de um sólido é a de saber quantos cubos de lado 1 (figura 3.38) cabem dentro do sólido. Intuitivamente, precisamos decompor o sólido em partes que saibamos relacionar com o cubo unitário. No entanto, para prosseguirmos precisaremos de um fato que assumiremos como axioma;

Axioma 3.20. A soma dos volumes das partes de uma decomposição de um sólido é igual ao volume do sólido.

3.9.1 Volume de um Paralelepípedo Retângulo

Suponhamos, por um momento, que um paralelepípedo retângulo $P(m,n,p)$ tenha dimensões m,n e p onde $m,n,p \in \mathbb{N}$, e cujo volume denotamos por $V(m,n,p)$. Para decompor este paralelepípedo agimos assim:

Partimos a aresta de comprimento m em m partes, cada uma medindo 1. Construimos m paralelepípedos $P(1,n,p)$. Segue do axioma que

$$V(m,n,p) = mV(1,n,p).$$

Procedemos analogamente com as outras dimensões do cubo, até que obtemos

$$V(m,n,p) = mnpV(1,1,1) = mnp. \quad (3.7)$$

Decorre da expressão 3.7 que o volume do paralelepípedo retângulo é igual ao produto da área da base B pela altura relativa a base;

$$V(m, n, p) = (mn) \cdot p = (\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

A figura 3.39 ilustra a decomposição do paralelepípedo $P(m, n, p)$ em mnp cubos de lado 1.

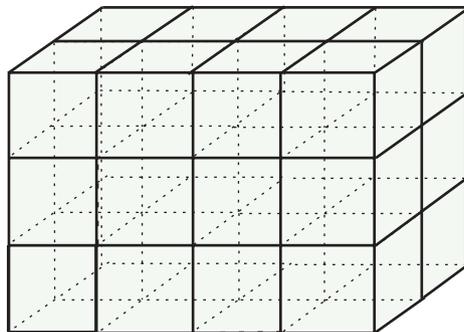


Figura 3.39 - $V(4, 3, 2) = 4 \cdot 3 \cdot 2$

Podemos estender a determinação do volume para o caso quando o paralelepípedo tem um lado $\frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$. Para isto, observamos que podemos decompor o cubo $P(1,1,1)$ em m paralelepípedos $P\left(\frac{1}{m}, 1, 1\right)$; por isto,

$$V(1,1,1) = mV\left(\frac{1}{m}, 1, 1\right) \Rightarrow V\left(\frac{1}{m}, 1, 1\right) = \frac{1}{m}V(1,1,1).$$

Conseqüentemente, se $m_1, m_2, n_1, n_2, p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, o volume do paralelepípedo

$$P\left(\frac{m_1}{m_2}, \frac{n_1}{n_2}, \frac{p_1}{p_2}\right) \text{ é } V\left(\frac{m_1}{m_2}, \frac{n_1}{n_2}, \frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p_1}{p_2}.$$

Neste ponto, chegamos à questão da determinação do volume do paralelepípedo $P(a, b, c)$ quando $a, b, c \in \mathbb{R}$. Não vamos discutir com profundidade esta questão uma vez que ela está intimamente ligada à definição dos números reais, a qual é conteúdo de Análise Matemática. No entanto, podemos citar o fato que toda propriedade de uma **função contínua** restrita aos números racio-

Você estudará este conceito no curso de Cálculo I e de Introdução à Análise.

nais se estende para os números reais. Como o volume é uma função contínua, temos que o volume de $P(a,b,c)$ é

$$V(a,b,c) = abc. \quad (3.8)$$

3.9.2 Princípio de Cavalieri

Como dito em Carvalho; Lima; Wagner e Morgado (2002), uma forma confortável de prosseguirmos na determinação do volume de outros sólidos é assumirmos o Princípio de Cavalieri como um dos nossos axiomas. Para enunciá-lo, consideramos uma seção transversal de um sólido como a interseção do sólido com um plano; dizemos que um sólido P foi seccionado transversalmente segundo a direção da reta l se ele foi decomposto pelas seções transversais (fatias) obtidas ao seccioná-lo com os planos perpendiculares a l (figura 3.40).

Bonaventura Cavalieri (aprox. 1598 - 1647) foi aluno de Galileu. Sua principal obra, *Geometria Indivisibilibus Continuum* (Geometria do Contínuo por Meio de Indivisíveis), escrita em 1629, descreve uma teoria das quantidades infinitamente pequenas.

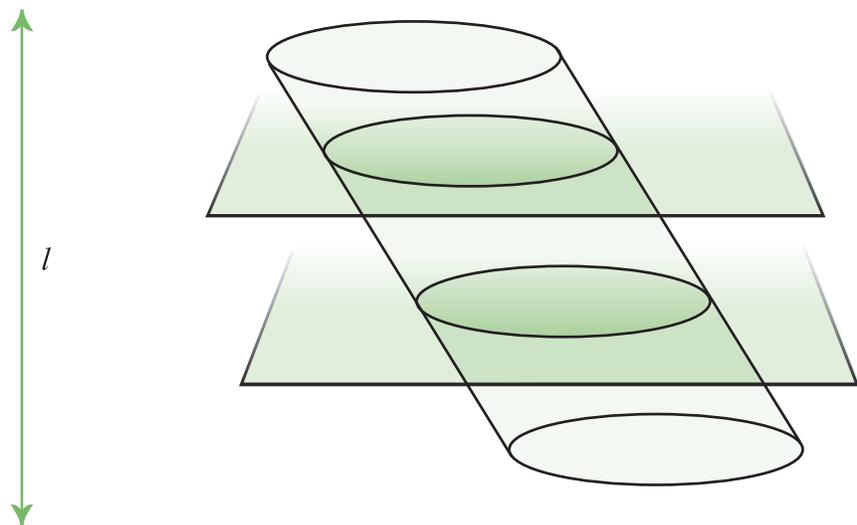


Figura 3.40

Axioma 3.21. (Princípio de Cavalieri). Se ao seccionarmos dois sólidos segundo uma reta l cada um dos planos cortar ambos os sólidos em seções transversais com a mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.

Um exemplo que torna o Princípio de Cavalieri intuitivo é o de uma pilha de papel retangular, formando um paralelepípedo retangular, que é transformada em um paralelogramo qualquer ou em outro sólido, conforme indica a figura 3.41.

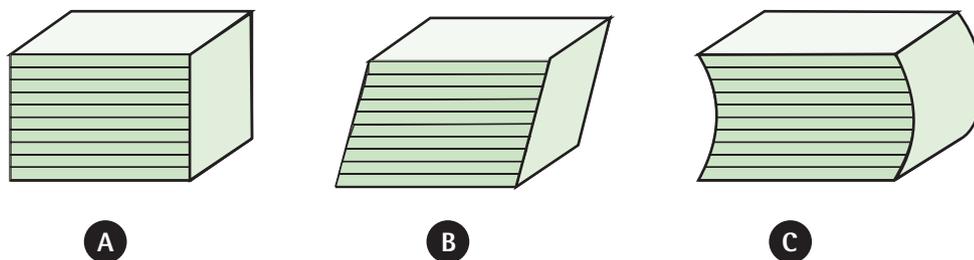


Figura 3.41

O volume das três pilhas é, obviamente, o mesmo. O volume da pilha na figura 3.41 (a) nós sabemos calcular, por isto conhecemos o volume das outras pilhas. Observamos que cada folha de papel corresponde a uma seção transversal, portanto, as 3 pilhas satisfazem ao Princípio de Cavalieri.

3.9.3 Volume e Área do Prisma

Seja P um prisma construído sobre a base $A_1 \dots A_n$ contida no plano α e seja $B_1 \dots B_n$ a outra base do prisma contida no plano β paralelo a α . Seja h a distância entre os planos paralelos e A a área da base.

Proposição 3.22. O volume de um prisma retangular é

$$V = (\text{área da base}) \times (\text{altura})$$

Demonstração. A demonstração segue das seguintes observações:

- 1) um paralelogramo admite uma decomposição em dois triângulos congruentes, portanto de mesma área;
- 2) a área de um paralelogramo é igual à área de um retângulo com a mesma base e a mesma altura;
- 3) um paralelepípedo admite uma decomposição em dois prismas triangulares semelhantes, como na figura 3.42;
- 4) pelo Princípio de Cavalieri, o volume de um paralelepípedo qualquer é igual ao de um paralelepípedo retangular com a mesma base e mesma altura.

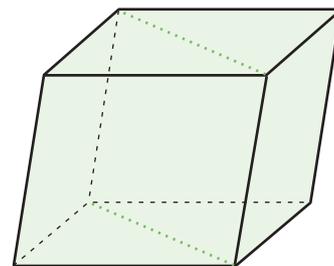


Figura 3.42

■

Uma vez que podemos decompor um polígono em triângulos, decorre da proposição acima, que o volume de um prisma P qualquer com área da base A_B e altura h é dado por

$$V_P = A_B \cdot h.$$

A área da superfície do prisma com base sobre um polígono de n lados é a soma das áreas das bases com as áreas A_F das faces laterais

$$A_P = 2A_B + nA_F. \quad (3.9)$$

Consideramos P_n um polígono regular de n lados inscritos a uma circunferência de raio R . Como vimos no capítulo anterior, a área de P_n é

$$A_{P_n} = \frac{nR^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right). \quad (3.10)$$

Portanto, o volume do prisma com base P_n e altura h é

$$V = \frac{nR^2 h}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right),$$

e a área é

$$A = 2 \frac{nR^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) + 2nR \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) h.$$

Ao considerarmos a situação limite $n \rightarrow \infty$, observamos que o prisma torna-se o cilindro de volume

$$V = (\pi R^2) h, \quad (3.11)$$

e área total é igual a

$$A = (2\pi R) h + 2\pi R^2. \quad (3.12)$$

No caso do volume, concluímos que o volume do cilindro é igual a (área da base) \times (altura) enquanto a área é (perímetro da base) \times (altura).

Exemplos.

- 1) Considere um cubo com arestas medindo $a + b$ e mostre geometricamente que

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Consideramos o cubo $ABCDEFGH$ com arestas (figura 3.43)

$$AB = AB_1 + B_1B = a + b, \quad AD = AD_1 + D_1D = a + b,$$

$$AE = AA' + A'E = a + b,$$

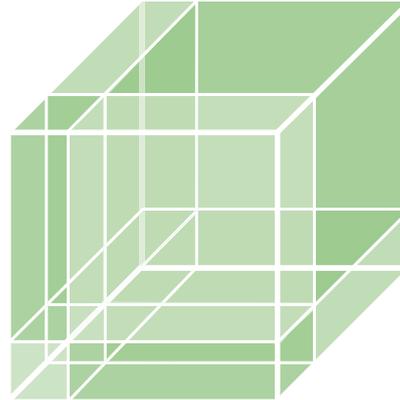
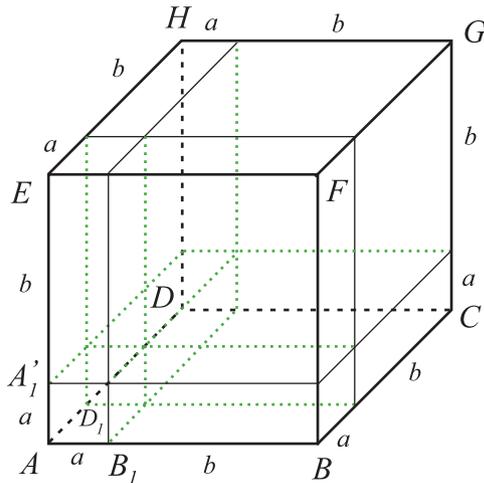


Figura 3.43

e, pelos pontos B_1 , D_1 , A_1 traçamos os planos paralelos às faces $ADHE$, $ABFE$, $ABCD$. Estes planos determinam, no cubo dado, oito paralelepípedos retângulos dos quais dois são cubos de arestas a e b ; três outros têm por arestas a , a , b e os três últimos têm por arestas a , b e b . Desta maneira, o volume do paralelepípedo retângulo de lados medindo $a+b$ é igual à soma dos volumes dos paralelepípedos, ou seja,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

- 2) As dimensões x , y e z de um paralelepípedo retângulo são proporcionais à a , b e c . Se a área do paralelepípedo é S , calcule x , y e z em função de a , b , c e S .

$$x = k \cdot a, \quad y = k \cdot b, \quad z = k \cdot c \Rightarrow S = 2(xy + xz + yz).$$

Substituindo, temos $S = 2k^2(ab + ac + bc)$, da onde:

$$k = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{2(ab + ac + bc)}}.$$

Portanto,

$$x = \frac{a\sqrt{S}}{\sqrt{2(ab+ac+bc)}}, \quad y = \frac{b\sqrt{S}}{\sqrt{2(ab+ac+bc)}},$$

$$z = \frac{c\sqrt{S}}{\sqrt{2(ab+ac+bc)}}.$$

- 3) Um prisma hexagonal é cortado por um plano perpendicular a uma aresta de uma base, segundo um quadrado de diagonal $\sqrt{6} m$ (figura 3.44). Calcular a área da base, a área lateral, a área total e o volume do prisma.

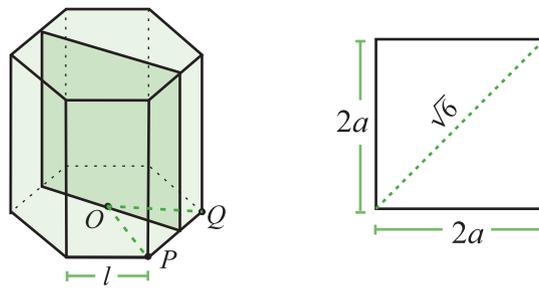


Figura 3.44

Seja a o apótema do hexágono, então do quadrado ABCD vem:

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, e do triângulo OPQ , conforme a figura 3.44, temos $l \frac{\sqrt{3}}{2} = a$ e, conseqüentemente, $l = 1$. Assim:

a) área da base (B):

$$B = 6 \cdot \frac{1}{2} l \cdot a \Rightarrow B = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

b) área lateral (A_L):

$$(A_L) = 6 \cdot l \cdot (2a) \Rightarrow A_L = 6\sqrt{3}.$$

c) área total (A_T):

$$(A_T) = A_L + 2B = 9\sqrt{3}.$$

d) volume (V):

$$V = B \cdot a \Rightarrow V = 4,5.$$

- 4) Determine o volume de um prisma triangular cuja base tem lados medindo a, b e c cm, uma das arestas na lateral mede k cm e a projeção ortogonal dela sobre o plano da base é igual ao maior lado da base.

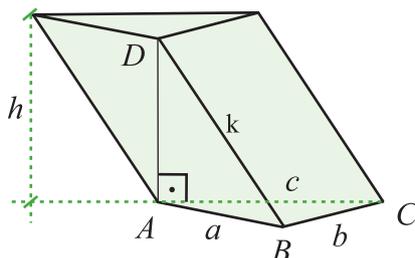


Figura 3.45

Suponha que o maior lado seja o que mede a cm. Sejam B a área da base e $p = \frac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro, então

$$B = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Para determinarmos a altura do prisma, observamos que o triângulo $\triangle ABD$ (figura 4.42) é retângulo e, por isto,

$$h^2 = k^2 - a^2 \Rightarrow h = \sqrt{k^2 - a^2}.$$

Portanto, o volume do prisma é

$$V = B \cdot h = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(k^2 - a^2)}.$$

- 5) Queremos dividir um volume v^3 em dois cubos de lados x e y sabendo que a soma dos lados de cada cubo deve ser $x + y = l$. Mostre que o problema admite solução se, e somente se, $l^3 \leq 4v^3$.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = v^3, \\ x + y = l. \end{cases}$$

Uma vez que

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = v^3,$$

segue que $x^2 - xy + y^2 = \frac{v^3}{l}$. (3.13)

Além disto,

$$(x + y)^2 = l^2 = x^2 + 2xy + y^2 = l^2. \quad (3.14)$$

Temos assim, a partir de 3.13 e de 3.14, que

$$xy = \frac{l^3 - v^3}{3l}.$$

Desta forma, a soma e o produto de x e y estão determinados pelas quantias v e l ;

$$x + y = l, \quad (3.15)$$

$$xy = \frac{l^3 - v^3}{3l}. \quad (3.16)$$

Ao resolvermos o sistema acima, obtemos

$$x = \frac{3l^2 + \sqrt{3l(4v^3 - l^3)}}{6l}, \quad y = \frac{3l^2 - \sqrt{3l(4v^3 - l^3)}}{6l}.$$

Desta forma, o problema admite solução se, e somente se

$$l^3 \leq 4v^3.$$

Lista de Exercícios 14

- 1) Sabendo que a base de um prisma de altura h é um polígono regular de n lados, determine a área total, o volume, a distância entre as faces laterais e a distância entre uma aresta lateral e a face oposta mais distante.
- 2) Determine a diagonal, a área e o volume de um paralelepípedo retângulo, sabendo que suas dimensões são 3 cm, 4 cm e 5 cm.
- 3) Mostre que, num paralelepípedo retângulo a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados das doze arestas.
- 4) Marque as opções corretas: a soma dos quadrados das diagonais de um paralelepípedo é igual a:
 - () a soma dos produtos das arestas tomadas duas a duas;
 - () a área lateral do paralelepípedo;
 - () a área total do paralelepípedo;

- () a soma das áreas das seções diagonais;
- () a soma dos quadrados das arestas.
- 5) Qual deve ser a altura de um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero de lado a para que seu volume seja igual ao volume de um cubo de aresta a ?
- 6) Determine o volume e a área lateral de um prisma reto de 10 cm de altura e cuja base é um hexágono regular de apótema $3\sqrt{3}$ cm.
- 7) A aresta lateral de um prisma tem 47 cm e uma das diagonais da seção reta, que é um losango, tem 6 cm. Sabendo que a área lateral mede 140 cm^2 , calcular a outra diagonal da seção reta.
- 8) Determine o volume de um prisma triangular cuja base é um triângulo equilátero de lado $2a$, uma aresta lateral mede $39a$ e sua projeção ortogonal sobre o plano da base mede $15a$.
- 9) Dois prismas retos têm por base polígonos regulares de n lados. Os apótemas medem a e a' , as alturas h e h' . Mostre que se a razão entre as áreas totais dos prismas é igual a razão de seus volumes, temos a relação

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{h'} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a'}.$$

- 10) Considere um paralelepípedo qualquer e construa um tetraedro inscrito a ele, cujas arestas são as diagonais das faces. Mostre que o volume do tetraedro é a terça parte do volume do paralelepípedo.
- 11) Mostre que o volume de um prisma, cuja seção reta é um polígono circunscrito a um círculo, é igual ao semiproduto de sua área lateral pelo raio do círculo.
- 12) Mostre que, quando a seção reta de um prisma é um polígono equilátero, a soma das distâncias de um ponto no interior do sólido, às faces laterais e às bases são constantes.
- 13) Mostre que dois paralelepípedos, com triedro igual, têm seus volumes proporcionais aos produtos das três arestas deste triedro.

- 14) Sobre as arestas de um ângulo triedro, cujas três faces compreendem ângulos de 60° , transportamos os segmentos $SA = a$, $SB = b$ e $SC = c$. Determine o volume do tetraedro $SABC$.
- 15) Mostre que os pontos médios das arestas de um tetraedro são os vértices de um octaedro cujo volume é a metade do tetraedro.

3.9.4 Volume e Área da Pirâmide

Para obtermos o volume da pirâmide trataremos, primeiramente, de calcular o volume da pirâmide de base triangular.

Lema 3.23. Duas pirâmides de mesma base triangular e mesma altura têm mesmo volume.

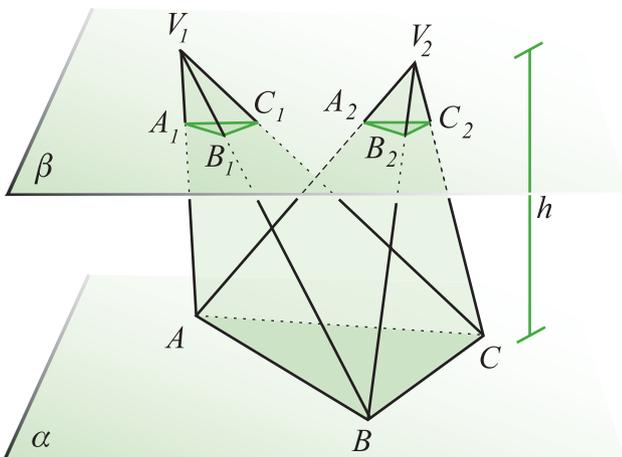
Demonstração. Sejam ΔABC o triângulo base e h a altura das pirâmides. Conforme ilustra a figura 3.46, sejam P_1 e P_2 pirâmides cuja base é o triângulo ΔABC contido no plano α e vértices V_1 e V_2 , respectivamente. Sejam S_1 e S_2 seções transversais obtidas na interseção com o plano β distando $h - h_1$ de α . A seção transversal de P_1 é $S_1 = \Delta A_1 B_1 C_1$ e a de P_2 é $S_2 = \Delta A_2 B_2 C_2$.

Segue que os triângulos $\Delta A_1 B_1 C_1$ e ΔABC são semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{h_1}{h}$. O mesmo ocorre entre os triângulos $\Delta A_2 B_2 C_2$ e ΔABC . Desta forma, se a área de S_1 é A_1 e a de S_2 é A_2 , temos

$$\frac{A_1}{A} = \frac{A_2}{A} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2.$$

Conseqüentemente, $A_1 = A_2$. Pelo Princípio de Cavalieri, os volumes das pirâmides são iguais. ■

Para obtermos uma expressão para o volume de uma pirâmide, a idéia é mostrar que podemos decompor um prisma em 3 pirâmides de volumes iguais:



Teorema 3.24. O volume de uma pirâmide com base triangular é dado por

$$V = \frac{1}{3}(\text{área da base}) \times (\text{altura}). \quad (3.17)$$

Demonstração. Seja $P = ABCDEF$ um prisma triangular como indica a figura 3.47. Ao traçarmos as diagonais das faces laterais AE , EC e AF , obtemos uma decomposição do prisma em 3 pirâmides $P_1 = ADEF$, $P_2 = EABC$ e $P_3 = EACF$, onde a primeira letra corresponde ao vértice e as outras 3 aos vértices da base. Assim,

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3.$$

Uma vez que as pirâmides $ADEF$ e $EABC$ têm a mesma altura e as bases são congruentes, pela proposição anterior elas têm o mesmo volume $V_1 = V_2$. Considerando $EACF$ com base $\triangle ACF$ e altura a distância de E ao plano do retângulo $ACFD$, observamos que o volume de $EACF$ é igual ao de $EADF = ADEF$, porque tem bases congruentes e mesma altura, da onde $V_3 = V_2 = V_1$.

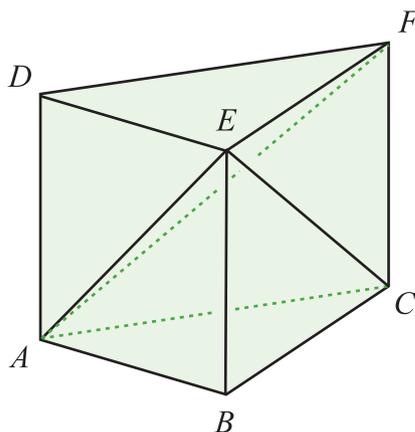


Figura 3.47

Se B a base do prisma e A_B a sua área, vimos que o volume do prisma é dado por $V = A_B \cdot h$, portanto,

$$3V_1 = V = A_B \cdot h \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} A_B \cdot h. \quad \blacksquare$$

Ao considerarmos P uma pirâmide qualquer (figura 3.48), podemos decompô-la em pirâmides de base triangulares. Pelo axioma 3.21, segue que

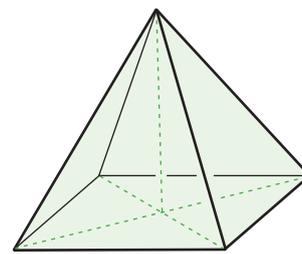


Figura 3.48

$$V = \frac{1}{3}(\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

Se uma pirâmide de altura h tem como base um polígono regular de n lados P_n , inscrito a uma circunferência de raio R , então o volume da pirâmide é

$$V = \frac{nR^2h}{6} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

No limite $n \rightarrow \infty$, a pirâmide se torna um cone com base sobre um círculo de raio R de volume

$$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h. \quad (3.18)$$

Se a distância do vértice da pirâmide a um dos vértices da base é g , a área da superfície lateral da pirâmide é

$$A_n = n \cdot \left(\frac{l_n \cdot h}{2}\right) = n \cdot \frac{2R \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} \cdot \sqrt{g^2 - R^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Portanto, o cone limite tem como base um círculo de raio R e geratriz medindo g . A área da superfície lateral do cone é

$$A = (\pi R)g. \quad (3.19)$$

A fórmula 3.19 pode ser interpretada da seguinte maneira: ao cortarmos (figura 3.49) o cone, obtemos um setor circular de raio g e ângulo central $\theta = \frac{2\pi R}{g}$. De acordo com a expressão para a área do setor circular, segue que

$$A = \frac{1}{2}g^2\theta = \pi Rg.$$

Ao interpretarmos as expressões obtidas para o volume e para a área, temos que o volume do cone é igual a

$$\frac{1}{3}(\text{área da base}) \times (\text{altura})$$

enquanto a expressão para a área é

$$\frac{1}{2}(\text{perímetro da base}) \times (\text{geratriz}).$$

Aqui foram utilizadas as expressões 2.2 e 2.4 do capítulo 2 para l_n e s_n do polígono regular P_n .

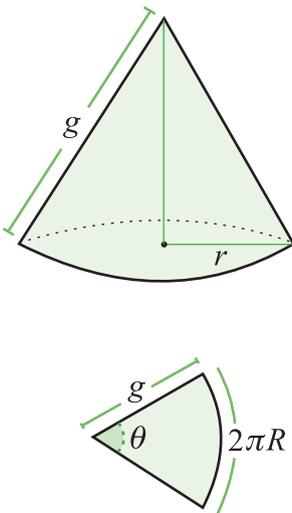


Figura 3.49

Exemplos.

- 1) Uma pirâmide regular hexagonal de $h = 4$ cm de altura tem arestas da base medindo $l = 2\sqrt{3}$ cm. Determine o apótema da pirâmide, a aresta lateral, a área total e o volume.

- a) apótema da pirâmide m_p : seja $m = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ cm o apótema da base, então o apótema da pirâmide m_p vale

$$m_p^2 = h^2 + m^2 = 4^2 + 3^3 = 25 \Rightarrow m_p = 5 \text{ cm.}$$

- b) aresta lateral a_l :

$$a_l^2 = m_p^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow a_l = \sqrt{28} \text{ cm.}$$

- c) área da base B :

$$B = 6 \cdot \frac{1}{2} l \cdot m \Rightarrow B = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

- d) área lateral A_L :

$$A_L = 6 \cdot \frac{1}{2} l \cdot m_p \Rightarrow A_L = 30\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

- e) área total A :

$$A = A_L + B = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

- f) volume V :

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

- 2) Determine a área total e o volume de um tetraedro regular de aresta a .

A área da base é $B = \frac{1}{2} a \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. A área total é

$A_T = 4B = a^2\sqrt{3}$. Para obtermos a altura do tetraedro, observamos que o pé da altura é o baricentro da base, uma vez que a base é equilátera. Seja $ABCD$ o tetraedro e G o pé da altura na base $\triangle ABC$; assim o triângulo $\triangle AGB$ é retângulo e, por isto,

$$h^2 = a^2 - (BG)^2 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Portanto, o volume é $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

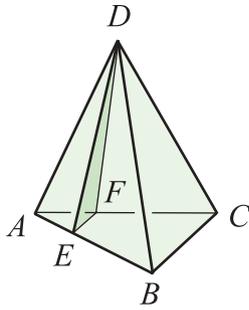


Figura 3.50

- 3) Um tetraedro regular $ABCD$ de aresta a é cortado por um plano que passa pelo vértice D e pelos pontos E e F situados sobre as arestas AB e AC . Sabendo que EF é paralelo a BC e que

$$AE = \frac{1}{4} AB,$$

encontre o volume da pirâmide $DAEF$ (figura 3.50).

A área da base $\triangle AEF$ é

$$A_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_B = \frac{a^2 \sqrt{3}}{64}.$$

Como a altura do tetraedro é $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, segue que

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{192}.$$

Os planos que formam o triedro são ortogonais entre si.

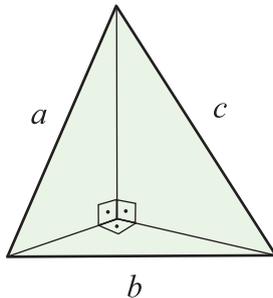


Figura 3.51

- 4) Uma pirâmide com base triangular tem lados medindo a , b e c . Supondo que o triedro oposto à base seja um **triedro trirretângulo**, calcule seu volume em função de a , b e c .

Sejam x , y e z as medidas das arestas do tetraedro trirretângulo representado na figura 3.51. Assim o volume do tetraedro é

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{xy}{2} \right) \cdot z = \frac{1}{6} xyz.$$

Seguem dos triângulos retângulos as seguintes relações:

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad (3.20a)$$

$$x^2 + z^2 = b^2, \quad (3.20b)$$

$$y^2 + z^2 = a^2. \quad (3.20c)$$

Ao somarmos as expressões acima, obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \quad (3.21)$$

Ao subtrairmos as expressões

$$(3.21) - (3.20 a) \Rightarrow z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}};$$

$$(3.21) - (3.20 \text{ b}) \Rightarrow y = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}};$$

$$(3.21) - (3.20 \text{ c}) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}}.$$

Portanto,

$$V = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{2}}.$$

- 5) Se dois tetraedros têm um triedro em comum, mostre que seus volumes são proporcionais aos produtos das arestas desse triedro.

Sejam $SA_1B_1C_1$ e $SA_2B_2C_2$ os tetraedros com vértice S em comum. Como indica a figura 3.52, sejam C_1H_1 a altura do tetraedro $SA_1B_1C_1$ relativa à base SA_1B_1 e C_2H_2 a altura do tetraedro $SA_2B_2C_2$ relativa à base SA_2B_2 . Além disto, suponhamos que a altura do ΔSA_1B_1 relativa à aresta SA_1 mede H e a altura do ΔSA_2B_2 relativa à aresta SA_2 mede h . Assim,

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SA_2B_2C_2}} = \frac{\frac{1}{3} A_{SA_1B_1} \cdot C_1H_1}{\frac{1}{3} A_{SA_2B_2} \cdot C_2H_2} = \frac{\frac{1}{2} SA_1 \cdot H \cdot C_1H_1}{\frac{1}{2} SA_2 \cdot h \cdot C_2H_2}.$$

Decorre da semelhança que

$$\frac{H}{h} = \frac{SB_1}{SB_2}, \quad \frac{C_1H_1}{C_2H_2} = \frac{SC_1}{SC_2}.$$

Portanto,

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SA_2B_2C_2}} = \frac{SA_1}{SA_2} \cdot \frac{SB_1}{SB_2} \cdot \frac{SC_1}{SC_2}.$$

- 6) Determine o volume de um tronco de prisma triangular com área da base igual a A_B e cujas arestas laterais medem a, b e c .

Suponha $a \leq b \leq c$. Um tronco de prisma é a região de um prisma compreendida entre dois planos que seccionam o prisma (figura 3.53(a)).

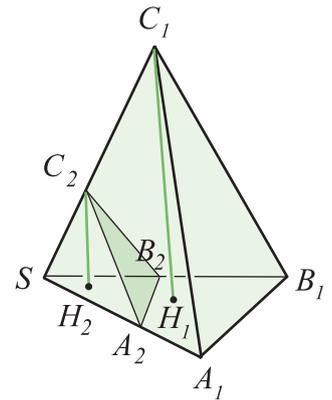


Figura 3.52

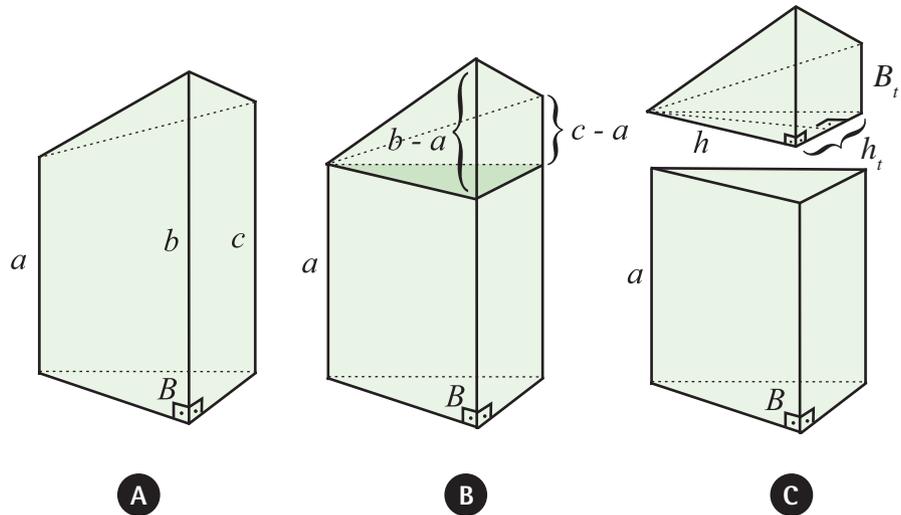


Figura 3.53

Suponha que a área da base do prisma seccionado seja B . Vamos considerar dois casos:

- a) tronco de prisma em que um dos planos seja perpendicular às arestas laterais do prisma (figura 3.53(b)). Neste caso, podemos dividir o tronco em dois sólidos: um prisma de altura a e uma pirâmide de altura h relativa à base que é um trapézio de área B_t e altura h_t (figura 3.53(c)). Desta maneira, o volume é

$$V = V_{\text{prisma}} + V_{\text{pirâmide}} = B \cdot a + \frac{1}{3} B_t \cdot h.$$

No entanto,

$$B_t = \frac{(c-a) + (b-a)}{2} h_t \Rightarrow V = B \cdot a + \frac{1}{3} (b+c-2a) \frac{hh_t}{2}.$$

Como indica a figura 3.53(c), temos $B = \frac{hh_t}{2}$. Portanto,

$$V = B \left(\frac{a+b+c}{3} \right).$$

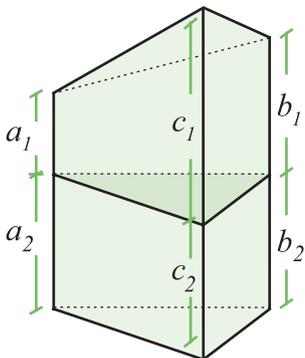


Figura 3.54

- b) tronco de prisma triangular qualquer. Ao seccionarmos o tronco de prisma T por um plano perpendicular às arestas, obtemos dois troncos T_1 e T_2 do tipo descrito no item anterior. Como mostra a figura 3.54, $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$ e $c = c_1 + c_2$.

$$V_T = V_{T_1} + V_{T_2} = B \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} \right) + B \left(\frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right) = B \left(\frac{a + b + c}{3} \right)$$

- 7) Se as bases de um tronco de pirâmide são paralelas e tem área B_1 e B_2 , mostre que o volume deste tronco é

$$V = \frac{h}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2).$$

Inicialmente, por tratar-se do caso mais simples, consideramos que a base do tronco é triangular. Sejam l_1 e l_2 os lados das bases do tronco e, h_1 e h_2 as alturas, conforme indica a figura 3.55. O volume do tronco é

$$V = \frac{1}{3}h_1B_1 - \frac{1}{3}h_2B_2.$$

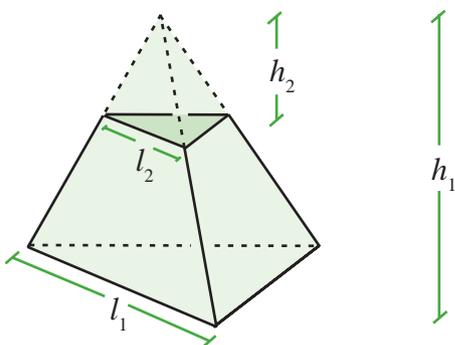


Figura 3.55

Devido à semelhança, temos $\frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2}$. Seja $h = h_1 - h_2$ a altura do tronco, então

$$h_1 = \frac{hl_1}{l_1 - l_2}, \quad h_2 = \frac{hl_2}{l_1 - l_2}.$$

Substituindo na expressão do volume do tronco, temos

$$V = \frac{h}{3} \cdot \frac{l_1 B_1 - l_2 B_2}{l_1 - l_2}.$$

No entanto, $\frac{l_1}{l_2} = \frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}}$, da onde

$$V = \frac{h}{3} \cdot \frac{B_1 \sqrt{B_1} - B_2 \sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}} = \frac{h}{3} \cdot (B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2).$$

Lista de Exercícios 15

- 1) Mostre que o volume de um tetraedro triretângulo cujas arestas opostas ao triedro retângulo medem a , b e c é dado por

$$V = \frac{p}{24} \sqrt{2A_B}, \quad 2p = a + b + c.$$

- 2) Uma pirâmide tem por base um triângulo equilátero de lado a . As faces laterais formam, com plano da base, diedros de 60° . Calcular a altura, o comprimento das arestas e o volume da pirâmide.

- 3) Na pirâmide $ABCDE$ a base é um retângulo de 6 m por 4 m. A aresta DE mede 8 m e ela também é a altura. Prove que as quatro faces laterais do triedro de vértice C medem 60° . Calcular a área total da pirâmide e o seu volume.

- 4) Mostre que a soma das distâncias de um ponto no interior de uma pirâmide com base triangular, as faces laterais são constantes. Aplique o resultado para determinar o circuncentro do tetraedro.

- 5) A seção reta de um tronco do prisma triangular de volume $V \text{ cm}^3$ tem área $B \text{ cm}^2$. Duas arestas laterais são a e b . Determine a outra.

- 6) Sejam a , b e c as arestas do triedro triretângulo de um tetraedro e h a altura relativa ao vértice desse triedro. Mostre que

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

- 7) Um tronco de cone é obtido ao cortarmos o cone por um plano paralelo a sua base. Se as bases de um tronco de cone são círculos com área B_1 e B_2 , mostre que o volume do tronco de cone é

$$V = \frac{h}{3} (B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2).$$

3.9.5 Volume e Área da Esfera

Para obtermos o volume da esfera $S_R(P)$ faremos uso do Princípio de Cavalieri. As seções transversais de uma esfera, segundo uma dada direção, são todas circulares. Se a distância da seção ao centro da esfera é h , então a área do círculo obtido é $\pi(R^2 - h^2)$.

A área de uma coroa circular, com raio externo R e raio interno h , também é $\pi(R^2 - h^2)$. Isto motiva a seguinte idéia: considere um cilindro com base num círculo de raio R , sejam O e O' os centros dos círculos C e C' que formam as bases e P o ponto médio do segmento OO' .

Dentro do cilindro construímos dois cones; um deles conforme indica a figura 3.56, com base igual a do círculo centrado em O e geratriz dada pelo segmento PQ , onde Q é um ponto sobre a circunferência do círculo C , o outro cone é idêntico com base em C' e geratriz PQ' , onde Q' está sobre a circunferência de C' .

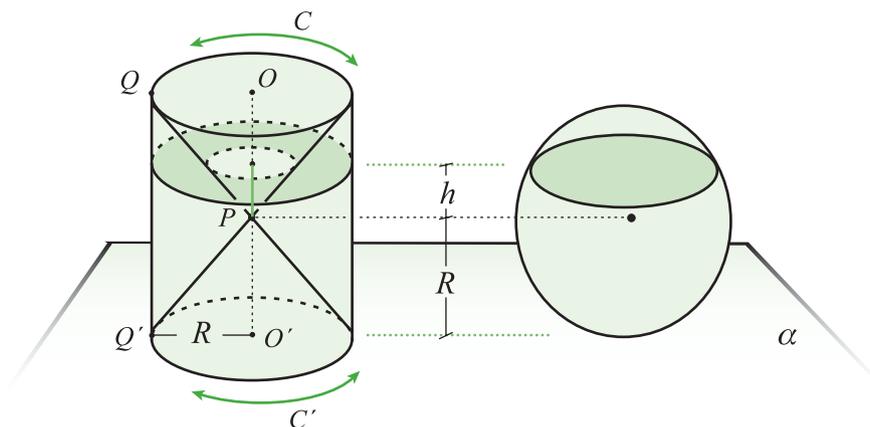


Figura 3.56

Ao cortarmos o cilindro por uma seção transversal a uma distância h do ponto P e paralela à base, obtemos um círculo S_1 , de área $A_1 = \pi R^2$. Portanto, a área da seção $S = S_1 - S_2$ é $\pi(R^2 - h^2)$. Pelo Princípio de Cavalieri, o volume da região interna ao cilindro e externa aos cones tem o mesmo volume da esfera de raio R . O volume do sólido interno ao cilindro e externo ao cone é

$$V = \pi R^2(2R) - 2 \frac{1}{3} \pi R^2(R) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Conseqüentemente, o volume da esfera $S_R(P)$ é

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad (3.22)$$

Para determinarmos a área da superfície da esfera $S_R(P)$, consideramos uma decomposição dela em n cones (figura 3.57), onde n é um número muito grande ($n \rightarrow \infty$). As bases dos cones encontram-se sobre a superfície de $S_R(P)$ e tem vértice P . Se as áreas das bases do i -ésimo cone é denotada por A_i , o volume de cada cone é $V_i = \frac{1}{3}A_i R$ e o volume total da esfera é

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}A_1 R + \frac{1}{3}A_2 R + \dots + \frac{1}{3}A_n R = \frac{1}{3}[A_1 + A_2 + \dots + A_n]R = \frac{1}{3}AR,$$

onde, se considerarmos n muito grande, $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ é a área da esfera.

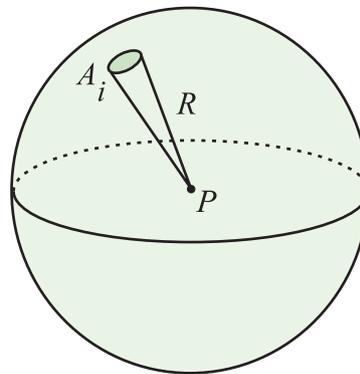


Figura 3.57

Conseqüentemente,

$$A = 4\pi R^2. \quad (3.23)$$

Exemplo.

- 1) Determine o raio R de uma esfera conhecendo a distância d entre duas seções paralelas (círculos) e os seus respectivos raios r_1 e r_2 ($r_1 \geq r_2$).

As distâncias das seções ao centro O da esfera são

$$d_1 = \sqrt{R^2 - r_1^2}, \quad d_2 = \sqrt{R^2 - r_2^2}.$$

Se as seções estiverem do mesmo lado do centro O , a distância entre elas é $d = d_1 - d_2$, caso contrário, a distância é $d = d_1 + d_2$. Desta maneira,

$$d = \sqrt{R^2 - r_1^2} \pm \sqrt{R^2 - r_2^2}$$

e

$$R^2 - r_1^2 = d^2 + R^2 - r_2^2 - 2d\sqrt{R^2 - r_2^2},$$

ou ainda

$$2d\sqrt{R^2 - r_2^2} = d^2 + r_1^2 - r_2^2$$

e

$$R = \frac{1}{2d} \sqrt{4d^2 r_2^2 + (d^2 + r_1^2 - r_2^2)^2}.$$

- 2) Mostre que a superfície de uma **calota esférica** é igual à área do círculo de raio igual à corda do arco gerador.

Seja R o raio da esfera. A área da calota gerada por um arco PA (figura 3.58) girando-o em torno do diâmetro PP' é

$$S = 2\pi R \cdot PC,$$

em que PC é a projeção do arco PA sobre o eixo PP' . Como $PP' = 2R$, temos

$$S = 2\pi R \cdot PC = \pi \cdot PP' \cdot PC.$$

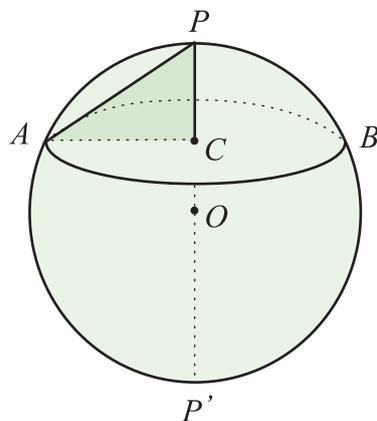


Figura 3.58

No triângulo retângulo $\Delta PAP'$ temos

$$PP' \cdot PC = (PA)^2 \Rightarrow S = \pi(PA)^2.$$

Uma calota esférica é definida como a zona sobre a esfera compreendida entre dois planos paralelos que cortam a esfera, sendo um deles tangente.

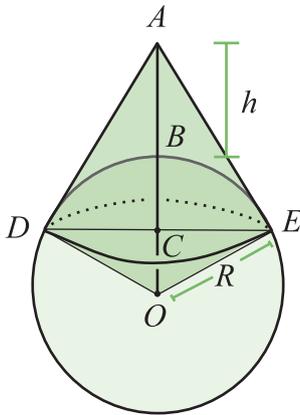


Figura 3.59

O raio da Terra é de, aproximadamente, 6.378 km, enquanto um avião pode voar a uns 10 km de altitude.

- 3) Qual é a extensão da superfície da Terra visível por um avião que se acha a uma distância h do solo?

Seja R o raio da Terra. O avião vê a calota DBE (figura 3.59), cuja área é

$$S = 2\pi R \cdot BC.$$

Para determinarmos BC , basta observarmos no triângulo retângulo ODA que

$$R^2 = OC \cdot OA = (R - BC)(R + h) \Rightarrow BC = \frac{Rh}{R + h}.$$

Portanto,

$$S = 2\pi \frac{R^2 h}{R + h}.$$

Como h é muito menor do que o **raio da Terra**, segue que a área vista pelo avião é aproximadamente $S = 2\pi R h$.

Lista de Exercícios 16

- 1) Sejam S e V a área e o volume de um poliedro circunscrito a uma esfera de raio R . Mostre que

$$V = \frac{1}{3} R \cdot S.$$

- 2) Conhecendo o comprimento l do eixo de uma caldeira cilíndrica determinada por duas semi-esferas de raio a , calcular as dimensões da parte cilíndrica de modo que a área da superfície total da caldeira seja igual a $4\pi a^2$.
- 3) Calcular o raio da base e a altura de um cone circunscrito a uma esfera de raio R , sabendo que a área do círculo de contato é igual à diferença das áreas das calotas que ele determina.
- 4) Mostre que se em um cilindro de revolução C cuja altura é igual ao diâmetro da base forem inscritos uma esfera S e um cone reto C_0 , os volumes desses três corpos são proporcionais aos números 3, 2 e 1;

$$\frac{V_C}{3} = \frac{V_S}{2} = \frac{V_{C_0}}{1}.$$

- 5) Mostre que o volume do cilindro equilátero inscrito em uma esfera é a média proporcional entre o volume do cone equilátero inscrito e o volume da esfera.
- 6) Mostre que a área da superfície gerada pelo contorno de um triângulo equilátero que é girado em torno de uma reta situado no seu plano e que não o encontra, é igual ao produto do perímetro desse triângulo pela circunferência descrita pelo seu centro de gravidade.
- 7) Calcular os lados de um triângulo ΔABC sabendo que os volumes gerados por esse triângulo, quando ele gira sucessivamente em torno de cada um de seus lados a , b e c , são equivalentes aos volumes das esferas de raios R_1 , R_2 e R_3 .
- 8) Em torno de que lado é necessário fazer-se girar um triângulo dado para obter-se o volume máximo?
- 9) Mostre que para uma esfera de raio R estar inscrita num tronco de cone, cujas bases tem raio r_1 e r_2 , e a geratriz mede g , é
- $$g = r_1 + r_2, \quad R = \sqrt{r_1 r_2}.$$
- 10) Num tronco de cone de revolução é inscrita uma esfera. Sendo o raio da esfera de 2 cm, quais devem ser os raios das bases do tronco para que o volume do tronco de cone seja o dobro do volume da esfera?
- 11) Calcular o volume da esfera inscrita num tronco de cone circular reto cujos raios das bases medem 1m e 4m respectivamente.

Capítulo 4

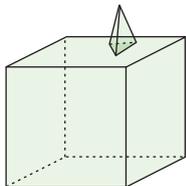
Poliedros

Capítulo 4

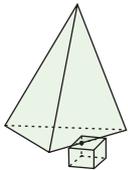
Poliedros

Neste capítulo veremos exemplos de figuras tridimensionais e estudaremos algumas relações geométricas.

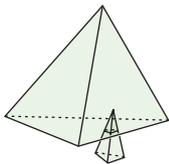
4.1 Definições e Exemplos



Definição 4.1. Um poliedro \mathcal{P} é a união de um número finito de polígonos planos de tal forma que a interseção de dois destes polígonos distintos seja um lado do polígono, um vértice do polígono ou vazia. Um poliedro é denominado um n – edro quando possui n faces.



Alguns exemplos de uniões de polígonos planos que **não** definem um poliedro são ilustrados na figura 4.1:

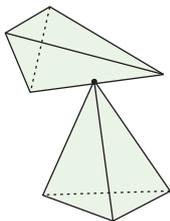


Os polígonos que formam um poliedro são as faces do poliedro, os segmentos na interseção de duas faces são as arestas do poliedro e os pontos na interseção de duas arestas são os vértices do poliedro. Assim, associado a um poliedro \mathcal{P} no espaço \mathbb{R}^3 temos os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P}} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \text{ é vértice de } \mathcal{P}\},$$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid a \text{ é aresta de } \mathcal{P}\},$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \{f \in \mathbb{R}^3 \mid f \text{ é face de } \mathcal{P}\}.$$



Como cada um dos conjuntos acima são finitos, o número de elementos de cada um é denotado por $V = \#\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$, $A = \#\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ e $F = \#\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$.

Figura 4.1

A definição 4.1 de poliedros é muito geral, ela inclui diversas figuras na classe de poliedro. Para obtermos alguns resultados matematicamente interessantes precisaremos nos restringir a classes particulares de poliedros.

Definição 4.2. Um conjunto é conexo se qualquer par de pontos pertencente ao poliedro pode ser ligado por uma curva contida no poliedro.

Vamos acrescentar mais itens a definição 4.2:

Definição 4.3. Um poliedro \mathcal{P} é a união de um número finito de polígonos planos convexos de tal forma que a interseção de dois destes polígonos distintos seja um segmento, um ponto ou vazia, e as seguintes condições sejam satisfeitas:

- 1) o poliedro é conexo,
- 2) ao retirarmos um vértice, ou uma aresta ou uma face o poliedro continua conexo.

Observação. A condição de conexidade implica que um poliedro \mathcal{P} não é a união $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ de dois poliedros disjuntos; isto é, tal que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$.

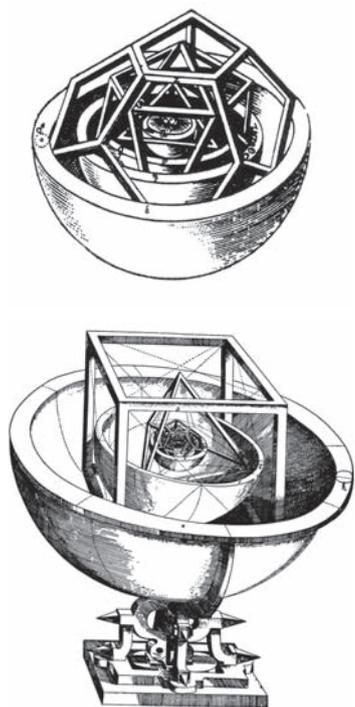
Ainda assim, a classe de poliedros é bastante grande e iremos restringi-la de acordo com o resultado almejado. A seguir veremos alguns exemplos e algumas maneiras de construir poliedros.

Definição 4.4. Dado um poliedro \mathcal{P} , o poliedro dual a \mathcal{P} , denotado \mathcal{P}^* , é construído tomando-se os pontos médios das faces de \mathcal{P} e ligando aqueles que se encontram em faces adjacentes.

Veremos a seguir exemplos de famílias de poliedros.

Poliedros de Platão

Também são conhecidos como poliedros regulares, uma vez que por definição as faces são polígonos regulares com o mesmo número de lados e a cada um dos vértices chegam o mesmo número de arestas. Os egípcios conheciam três sólidos regulares (tetraedro, cubo, octaedro) e aplicavam este conhecimento nos projetos arquitetônicos da época. No século X a.C., os etruscos veneravam pedras lavradas em formatos geométricos. Na época de Pitágoras (565 – 490 a.C.) só eram conhecidos quatro sólidos regulares: o tetraedro, o cubo, o octaedro e o dodecaedro. Segundo mencionado



Figuras 4.2

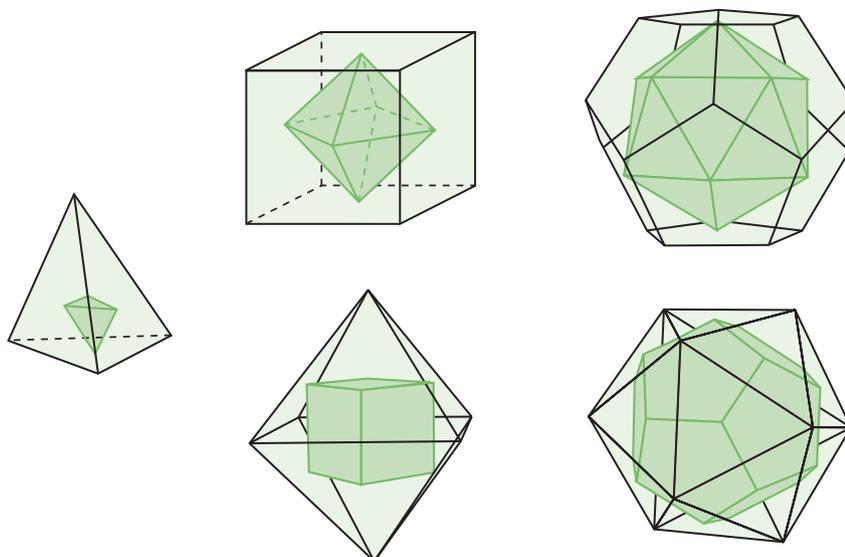
em Beckmann (1971), um membro da ordem pitagórica foi linchado e afogado num esgoto público quando outros membros da ordem descobriram que ele havia revelado o segredo do dodecaedro a um estranho. O dodecaedro era encontrado na Itália na forma de cristal de pirita de ferro. Devido a Platão, estas formas geométricas regulares correspondiam aos 4 elementos da natureza:

- Terra \rightsquigarrow cubo,
- Água \rightsquigarrow icosaedro,
- Ar \rightsquigarrow octaedro,
- Fogo \rightsquigarrow tetraedro
- Cosmos \rightsquigarrow dodecaedro.

Esta idéia foi aplicada por Kepler quando, na sua obra *Harmonices Mundi* de 1619, propôs um modelo cosmológico do universo (figura 4.2).

Os poliedros duais associados aos poliedros regulares são os seguintes (figura 4.3):

- tetraedro \leftrightarrow tetraedro,
- cubo \leftrightarrow octaedro,
- dodecaedro \leftrightarrow icosaedro.



Figuras 4.3

Poliedros de Arquimedes

Se na definição de poliedros regulares relaxarmos a condição das faces serem todas polígonos regulares do mesmo tipo e permitirmos que sejam apenas polígonos regulares obtemos os poliedros de Arquimedes (figura 4.4). Os poliedros de Platão são casos particulares de poliedros de Arquimedes. Assim, nos poliedros de Arquimedes temos faces que são polígonos regulares de mais de um tipo e em qualquer um do seus vértices o número de arestas e os tipos das faces incidindo são sempre iguais. Excluindo os poliedros de Platão existem apenas 13 poliedros arquimedianos. Eles são descritos pelos tipos de faces e pelo número de cada tipo que incide no vértice. Por exemplo: o poliedro $a.b.c$ significa que em cada vértice chegam polígonos regulares de a , b e c lados (na ordem), podendo haver tipos repetidos $a^n.b^m$.

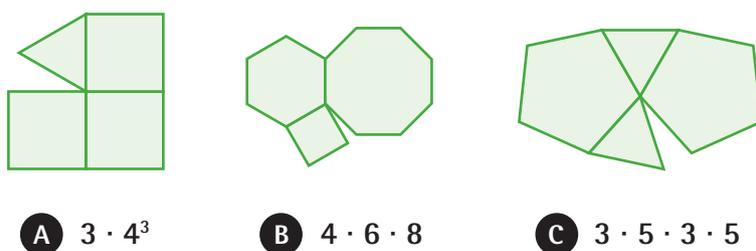


Figura 4.4

Desta forma, a lista completa de poliedros de Arquimedes encontra-se na tabela abaixo:

Tipo	Nome
$3 \cdot 6^2$	tetraedro truncado
$3 \cdot 8^2$	cubo truncado
$(3 \cdot 4)^2$	cuboctaedro
$4 \cdot 6^2$	octaedro truncado
$4 \cdot 6 \cdot 8$	cuboctaedro truncado
$3 \cdot 4^2$	rombicuboctaedro
$5 \cdot 6^2$	icosaedro truncado
$(3 \cdot 5)^2$	icosidodecaedro
$3 \cdot 10^2$	dodecaedro truncado
$4 \cdot 6 \cdot 10$	icosidodecaedro truncado
$3 \cdot 4 \cdot 5^2$	rombicosidodecaedro
$3^4 \cdot 4$	cubo achatado
$3^4 \cdot 5$	dodecaedro achatado

Tabela 4.1

As figuras seguintes mostram como os poliedros de Arquimedes podem ser construídos:

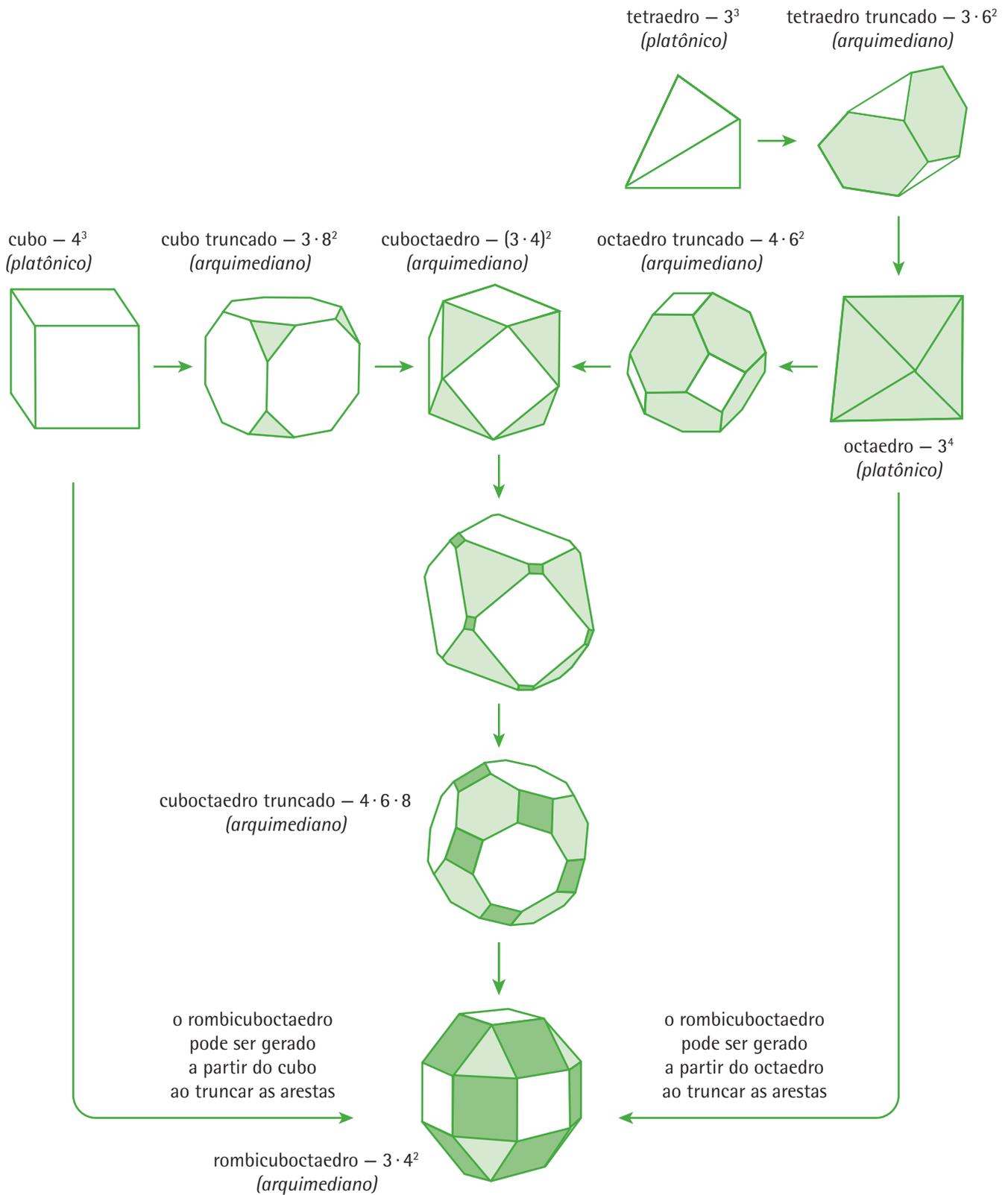


Figura 4.5a

icosaedro — 3^5 (platônico) icosaedro truncado — $5 \cdot 6^2$ (arquimediano) icosidodecaedro — $(3 \cdot 5)^2$ (arquimediano) dodecaedro truncado — $3 \cdot 10^2$ (arquimediano) dodecaedro — 5^3 (platônico)

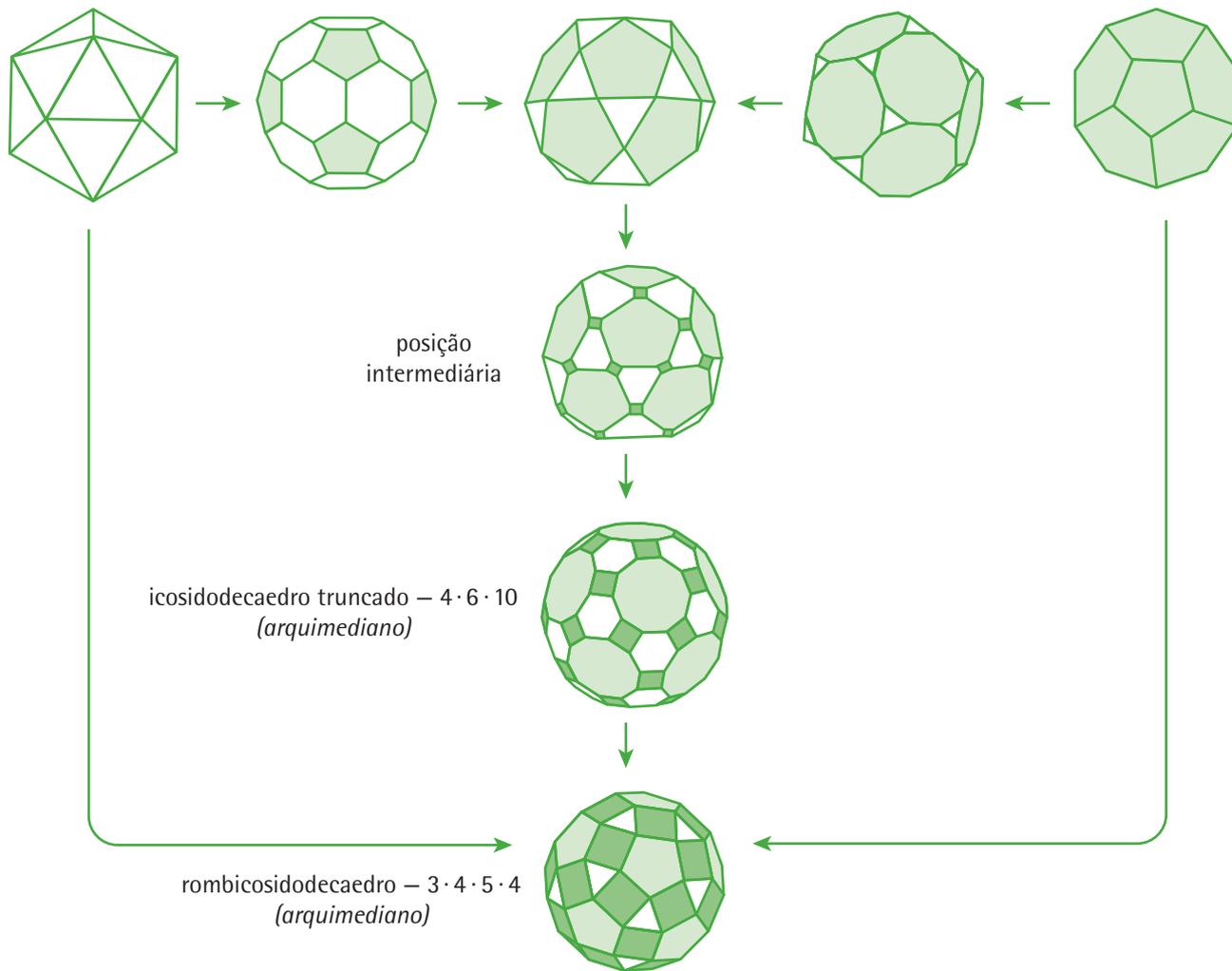


Figura 4.5b

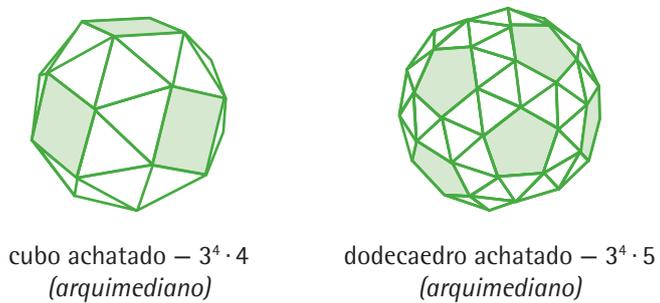


Figura 4.5c

No famoso quadro *Retratto di Fra' Luca Pacioli*, exposto no Museo e Galeria di Capodimonte, Nápoles-Itália, mostrado abaixo, observamos um rombicuboctaedro. Há controvérsias sobre quem foi o pintor do quadro, porém acredita-se tenha sido Jocoço de' Barbari. Fra' Luca Pacioli foi um matemático do período renascentista. O quadro retrata Pacioli expondo um teorema para um de seus pupilos.

No quadro *Melancolia* de Albrecht Durer (1471 – 1528), renascentista alemão, observamos um pensador frustrado sentado ao lado de um poliedro incomum. Muito se tem analisado sobre o simbolismo na imagem e o significado dos elementos no quadro, incluindo o poliedro.



Figura 4.6 - Retratto di Fra' Luca Pacioli



Figura 4.7 - Melancolia

Diversos pintores e escultores utilizaram os poliedros como elementos de suas obras:

- Paolo Ucello (1397 - 1475)



Figura 4.8

- Fra Giovanni de Verona (cerca de 1520)

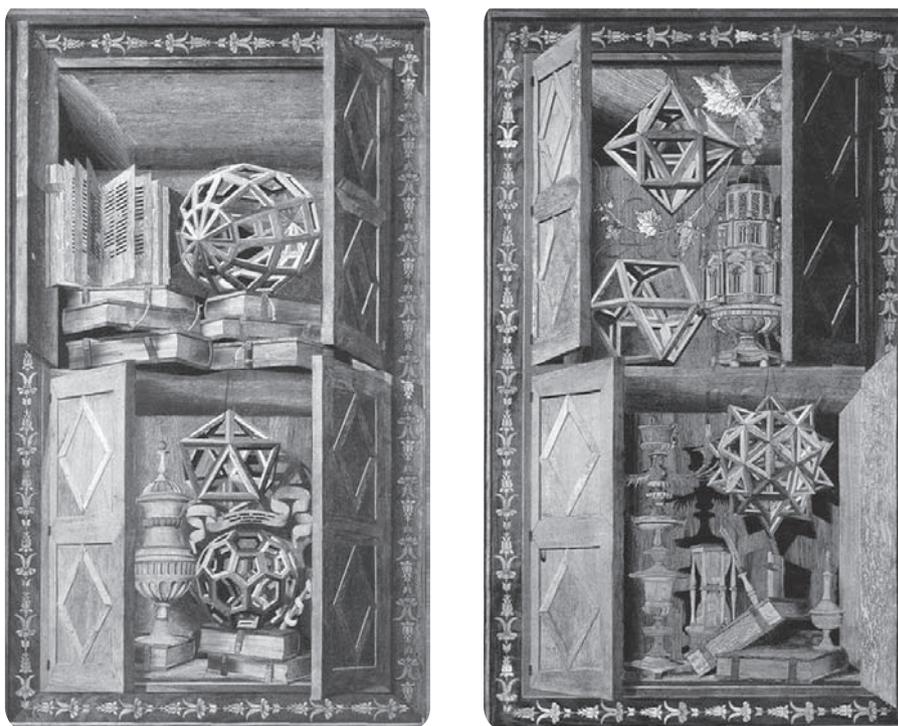


Figura 4.9

- Alberto Giacometti (1901 – 1966)



Figura 4.10

- M. C. Escher (1898 – 1972)

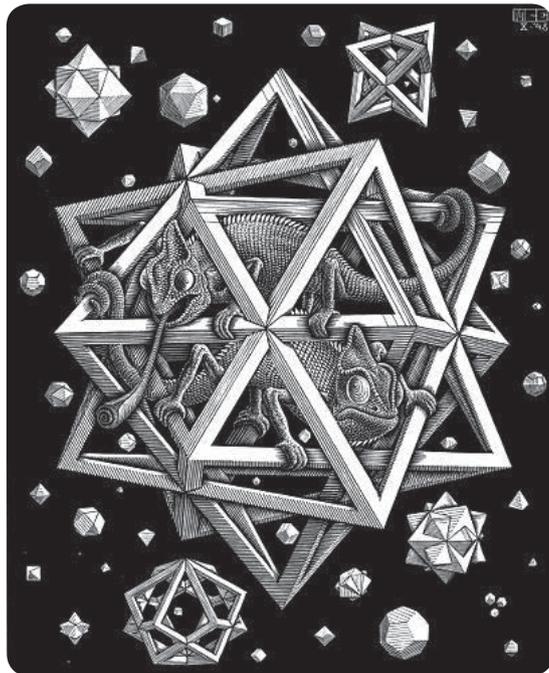
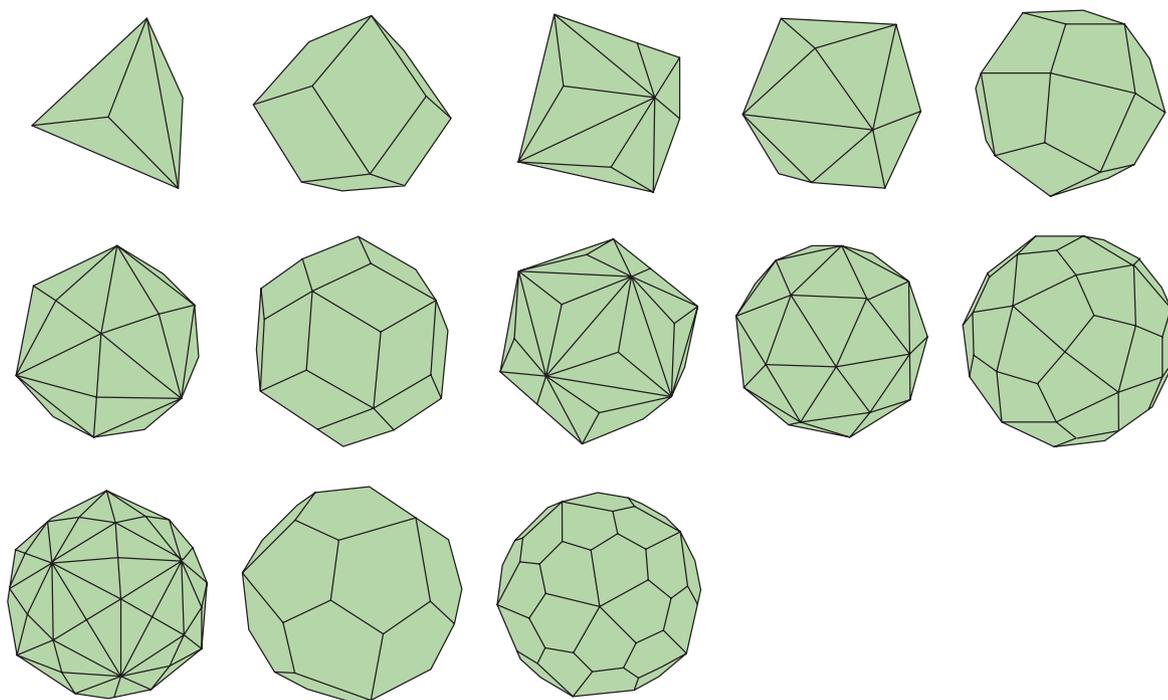


Figura 4.11

Poliedros de Catalan

Estes são os poliedros duais aos poliedros de Arquimedes. Os modelos encontram-se na figura 4.12:



Figuras 4.12

Poliedros, prismas e anti-prismas

Os prismas nós já vimos. Os anti prismas são construídos da seguinte maneira:

- 1) construa um polígono regular \mathcal{P} de n lados num plano α ,
- 2) construa um plano β paralelo ao plano α ,
- 3) sobre o plano β construa um polígono Q do mesmo tipo que P de maneira que um vértice de P seja equidistante de dois vértices de Q (basta rodar P por um ângulo π/n).

Existe um número infinito de prismas e anti prismas.

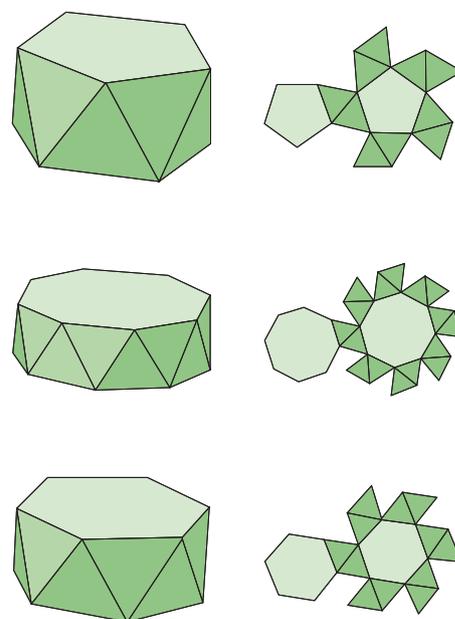


Figura 4.13

Poliedros de Johnson

Todos os poliedros convexos formados por faces que sejam poliedros regulares e não pertencem as classes de poliedros platônicos, arquimedianos, prismas ou anti-prismas são conhecidos como poliedros de Johnson (figura 4.14). Em 1960, Norman Johnson conjecturou que existem 92 nesta categoria e em 1969 Johnson, Grünbaum e Zalgaller (Canadian J. of Maths, 18, 1966, 169-200) provaram a conjectura.

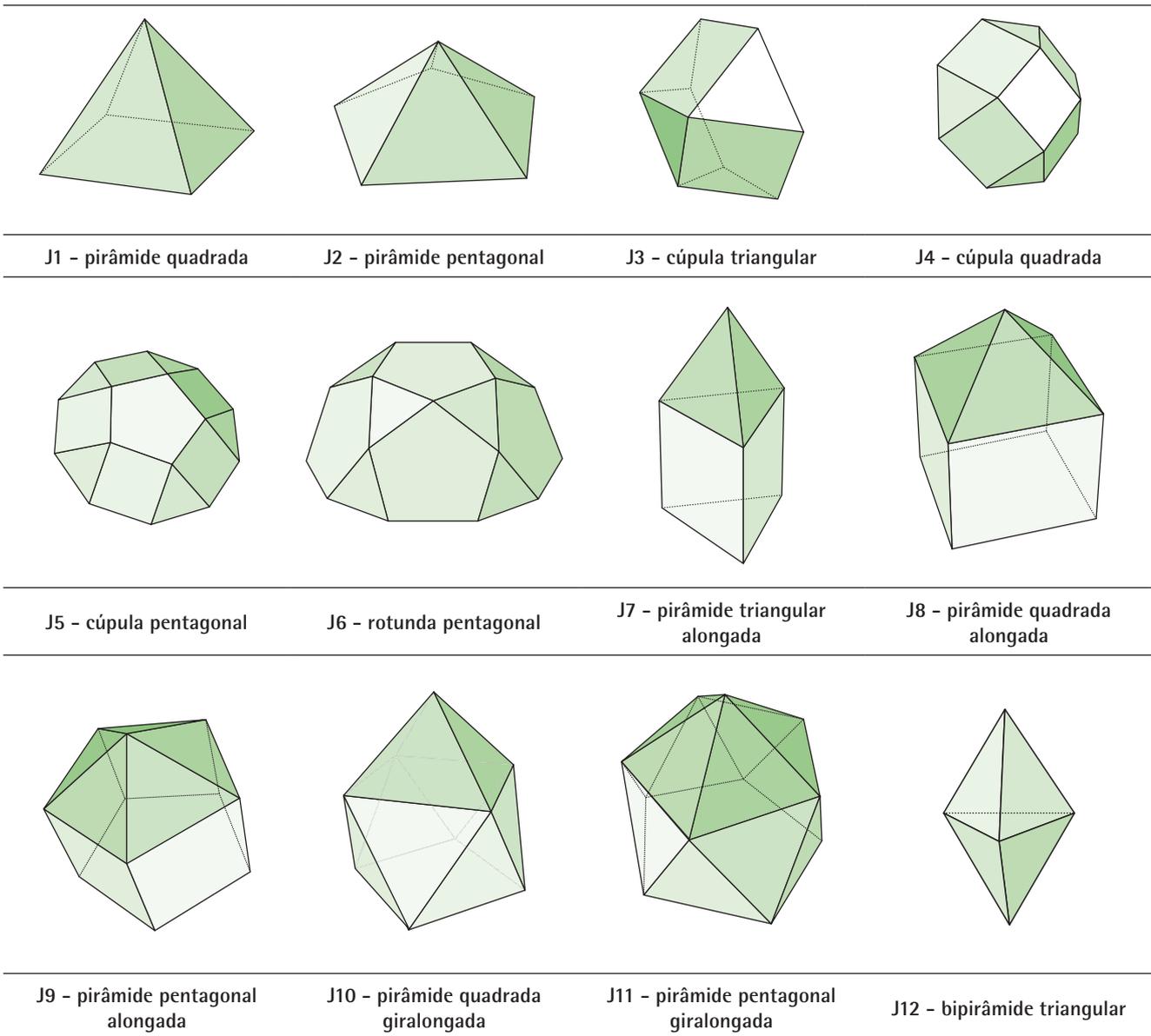
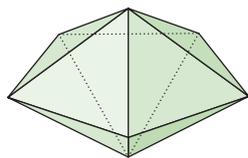
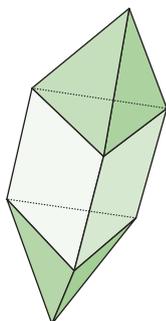


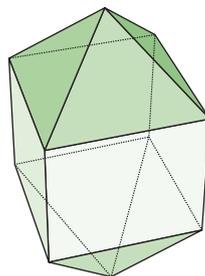
Figura 4.14a - Poliedros J1 a J12



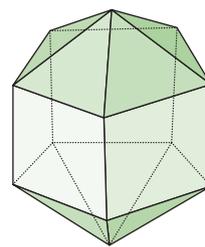
J13 - bipirâmide pentagonal



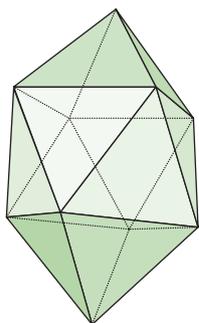
J14 - bipirâmide triangular alongada



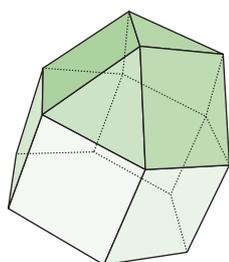
J15 - bipirâmide quadrada alongada



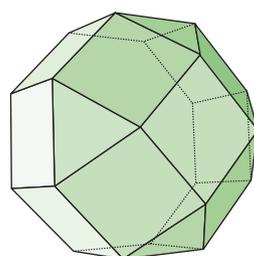
J16 - bipirâmide pentagonal alongada



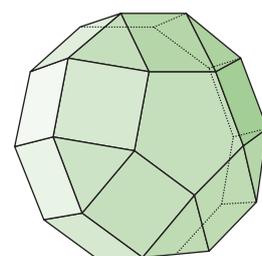
J17 - bipirâmide quadrada giralongada



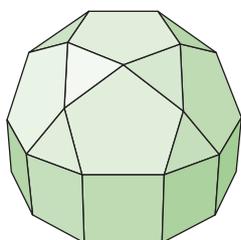
J18 - cúpula triangular alongada



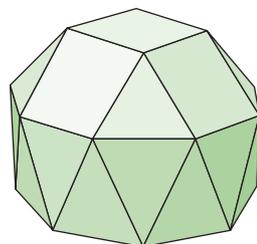
J19 - cúpula quadrada alongada



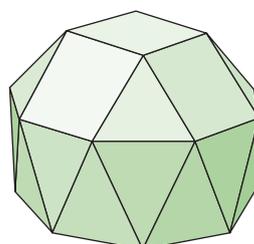
J20 - cúpula pentagonal alongada



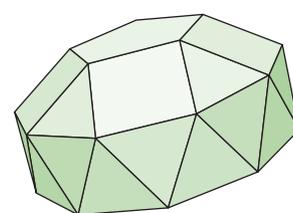
J21 - rotunda pentagonal alongada



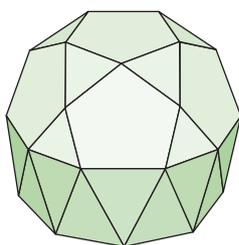
J22 - cúpula triangular giralongada



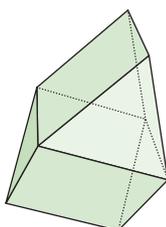
J23 - cúpula quadrada giralongada



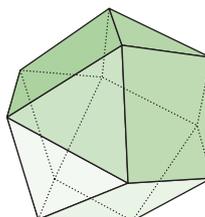
J24 - cúpula pentagonal giralongada



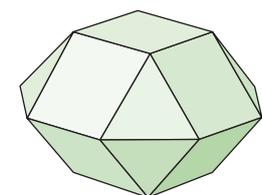
J25 - rotunde pentagonal torcida



J26 - girobiprisma triangular

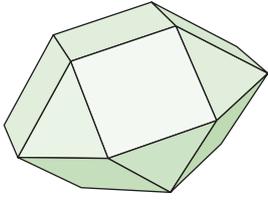


J27 - ortobicúpula triangular

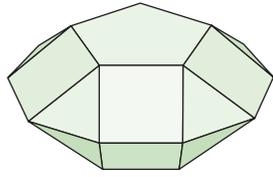


J28 - ortobicúpula quadrada

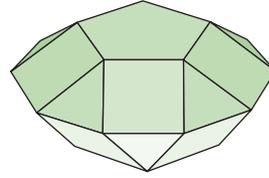
Figura 4.14b - Poliedros J13 a J28



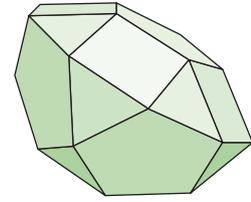
J29 - girobicúpula quadrada



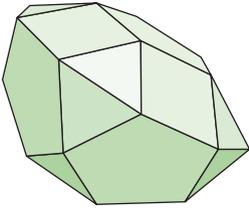
J30 - ortobicúpula pentagonal



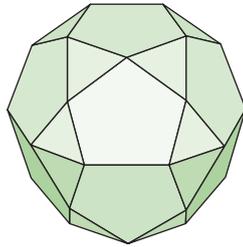
J31 - girobicúpula pentagonal



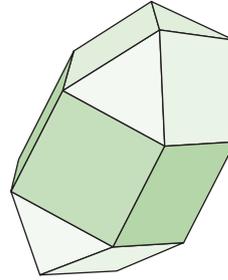
J32 - ortocúpula-rotunde pentagonal



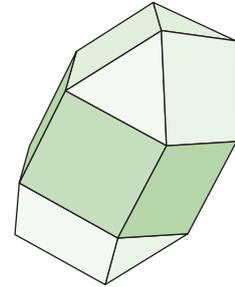
J33 - girocúpula-rotunde pentagonal



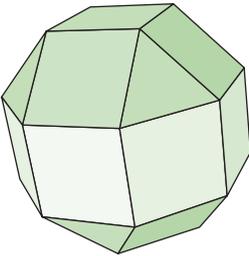
J34 - ortobirotonde pentagonal



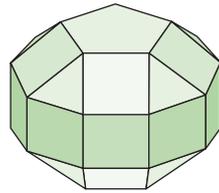
J35 - ortobicúpula triangular alongada



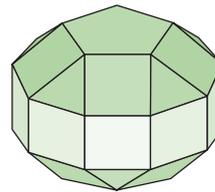
J36 - girobicúpula triangular alongada



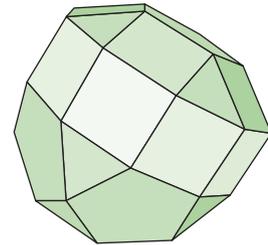
J37 - girobicúpula quadrada alongada



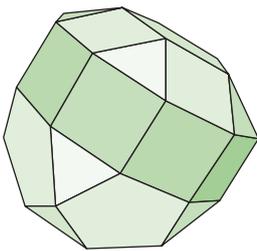
J38 - ortobicúpula pentagonal alongada



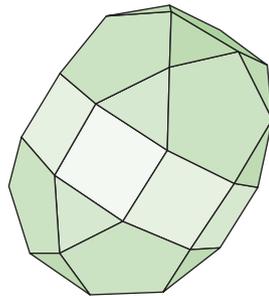
J39 - girobicúpula pentagonal alongada



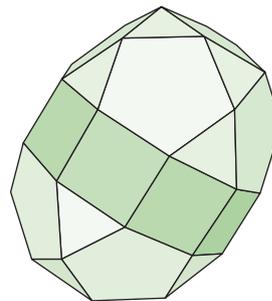
J40 - ortocúpula-rotunde pentagonal alongada



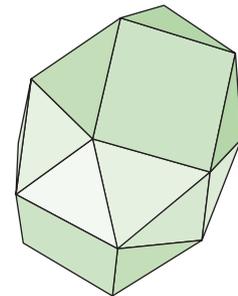
J41 - girocúpula-rotunde pentagonal alongada



J42 - ortobirotonde pentagonal alongada

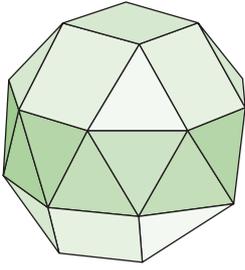


J43 - girobirotonde pentagonal alongada

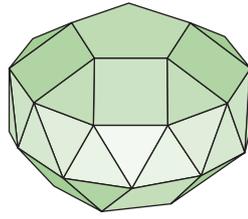


J44 - bicúpula triangular torcida

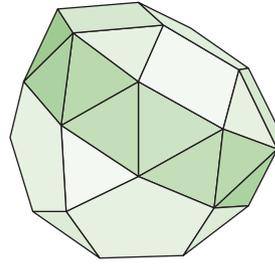
Figura 4.14c - Poliedros J29 a J44



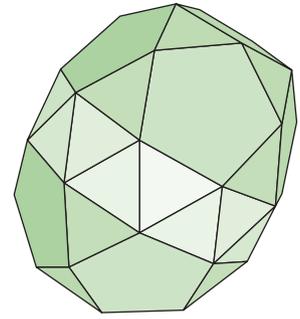
J45 - bipirâmide pentagonal



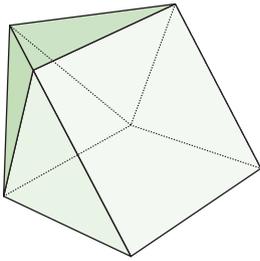
J46 - bicúpula pentagonal torcida



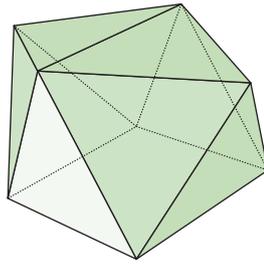
J47 - cúpula-rotunde pentagonal torcida



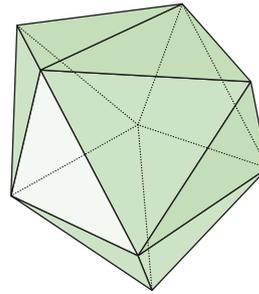
J48 - birotunde pentagonal torcida



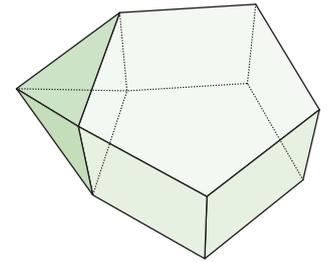
J49 - prisma triangular aumentado



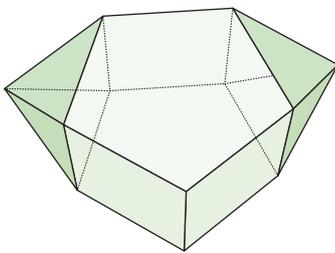
J50 - prisma triangular biaumentado



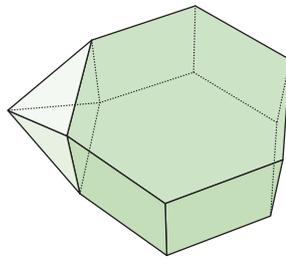
J51 - prisma triangular triaumentado



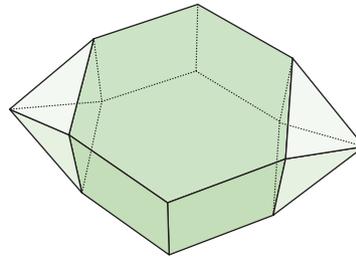
J52 - prisma pentagonal aumentado



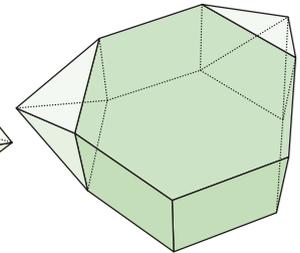
J53 - prisma pentagonal biaumentado



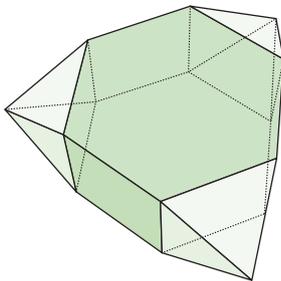
J54 - prisma hexagonal aumentado



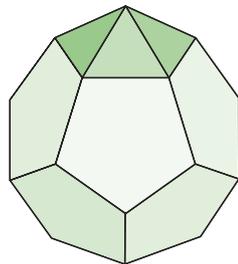
J55 - prisma hexagonal parabiaumentado



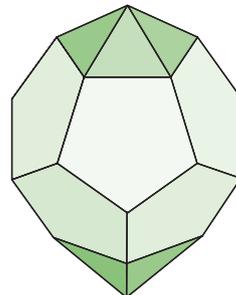
J56 - prisma hexagonal metabiaumentado



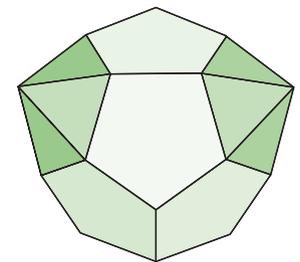
J57 - prisma hexagonal triaumentado



J58 - dodecaedro aumentado

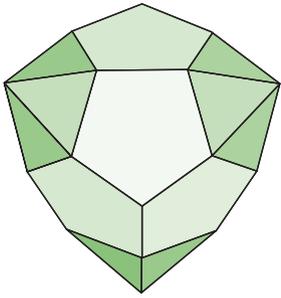


J59 - dodecaedro parabiaumentado

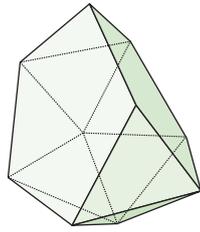


J60 - dodecaedro metabiaumentado

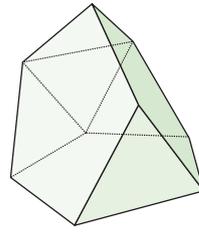
Figura 4.14d - Poliedros J45 a J60



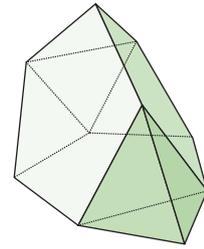
J61 - dodecaedro
triaumentado



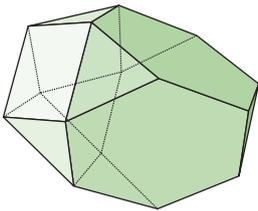
J62 - icosaedro
metabidiminuído



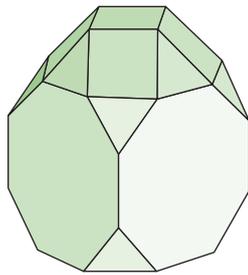
J63 - icosaedro tridiminuído



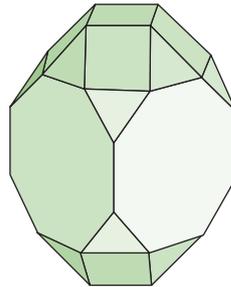
J64 - icosaedro
tridiminuído aumentado



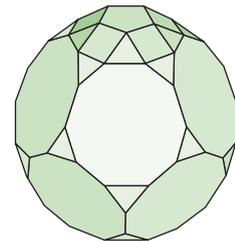
J65 - tetraedro truncado
aumentado



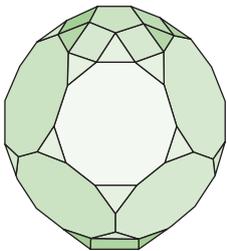
J66 - cubo truncado
aumentado



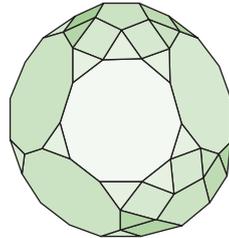
J67 - cubo truncado
biaumentado



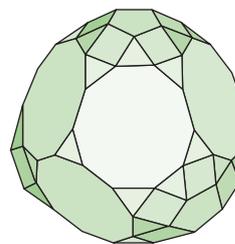
J68 - dodecaedro truncado
aumentado



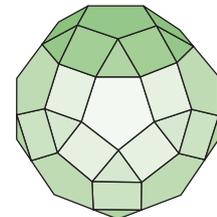
J69 - dodecaedro truncado
parabiaumentado



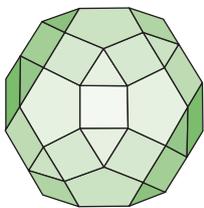
J70 - dodecaedro truncado
metabiaumentado



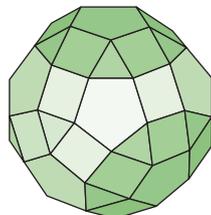
J71 - dodecaedro truncado
triaumentado



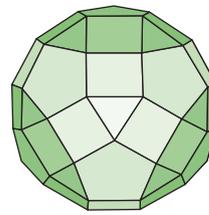
J72 - giro-rombicosidodecaedro



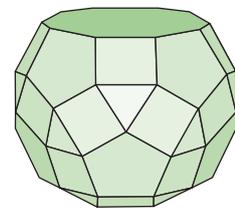
J73 - parabigiro-
rombicosidodecaedro



J74 - metabigiro-
rombicosidodecaedro

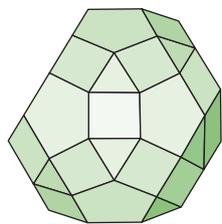


J75 - trigiro-
rombicosidodecaedro

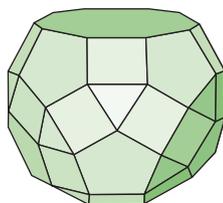


J76 - rombicosidodecaedro
diminuído

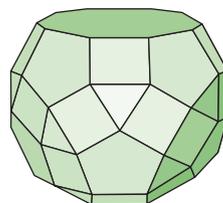
Figura 4.14e - Poliedros J61 a J76



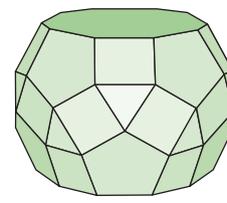
J77 - rombosidodecaedro
paragirodiminuído



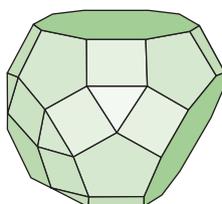
J78 - rombosidodecaedro
metagirodiminuído



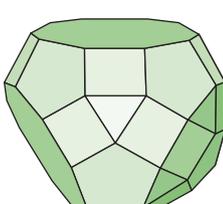
J79 - rombosidodecaedro
bigirodiminuído



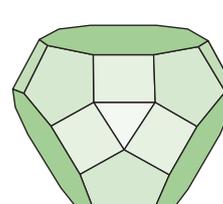
J80 - rombosidodecaedro
parabidiminuído



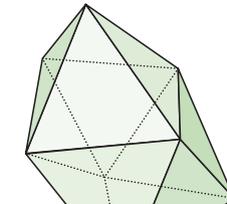
J81 - rombosidodecaedro
metabidiminuído



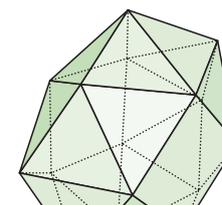
J82 - rombosidodecaedro
girobidiminuído



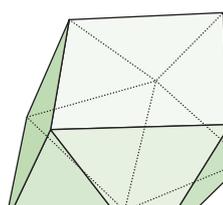
J83 - rombosidodecaedro
tridiminuído



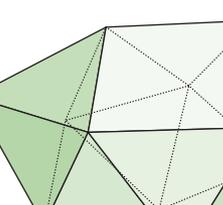
J84 - snub disfenoide



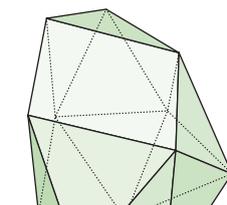
J85 - snub antiprisma
quadrado



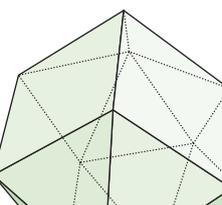
J86 - spheno-couronne



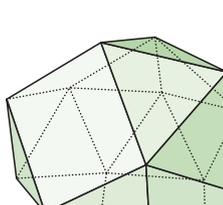
J87 - spheno-couronne
aumentada



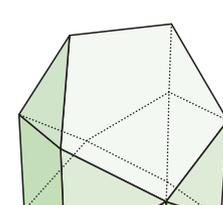
J88 - sphenomega-couronne



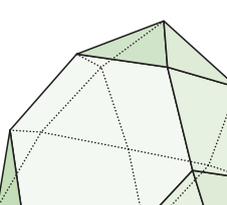
J89 - hebesphenomega-
couronne



J90 - dispheno-ceinture



J91 - birotonde bilunaire



J92 - hebespheno-rotonde
triangular

Figura 4.14g - Poliedros J77 a J92

Deltaedros

Os poliedros cujas faces são triângulos equiláteros são conhecidos como poliedros deltaedros. Existem 8 deltaedros convexos (figura 4.15), 3 dos quais são poliedros regulares: o tetraedro, o octaedro e o icosaedro. É curioso o fato que ao contarmos o número de faces de cada um dos deltaedros eles formam a seqüência 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, e 20.

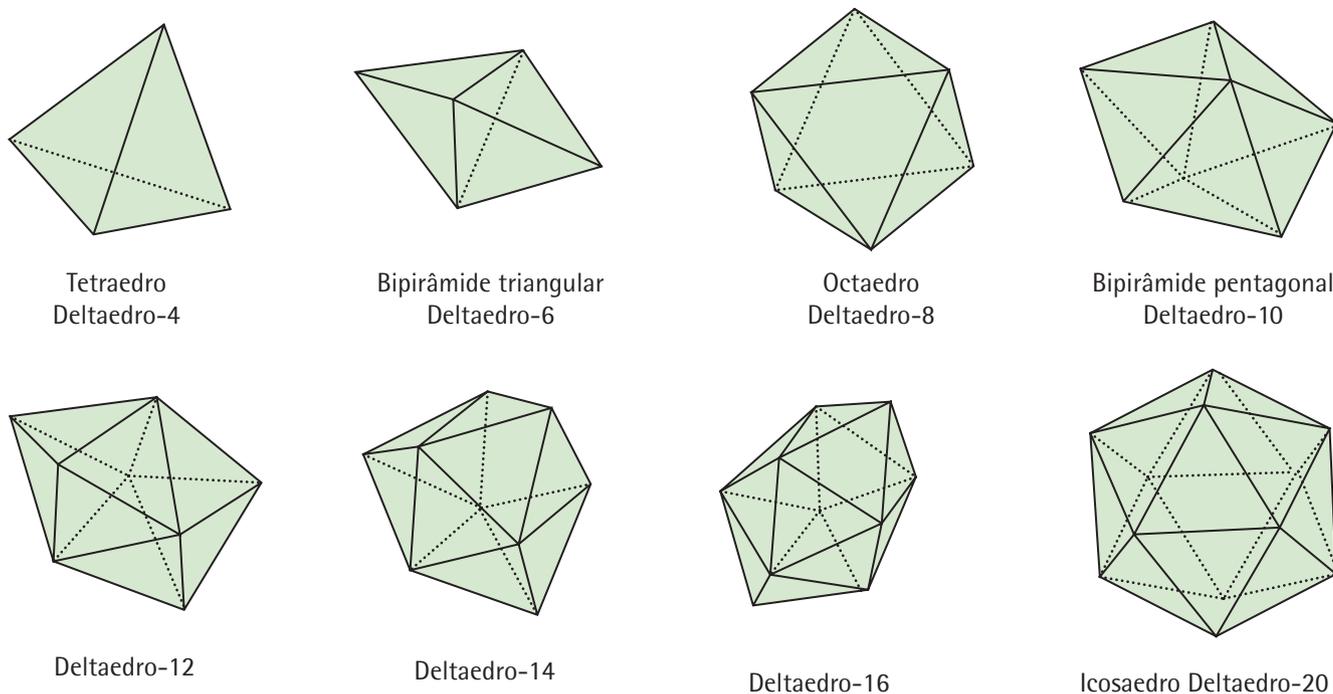


Figura 4.15

Dipirâmides e deltoedros

As dipirâmides são os poliedros duais dos prismas e os deltoedros são os duais dos anti-prismas (figura 4.16).

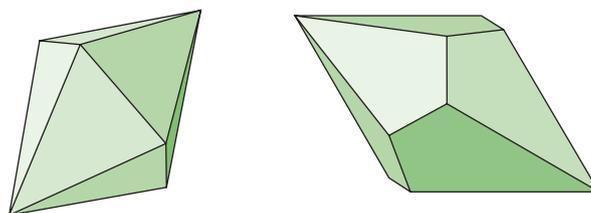


Figura 4.16

Monstros

Além dos poliedros nos itens anteriores existem muitos outros que, por não satisfazerem a relação de Euler, eram denominados de monstros. O ilustrado na figura 4.17a satisfaz $\chi(\mathcal{P}) = 16 - 32 + 16 = 0$ (que será visto na seção 4.2.1). Para compreender melhor estes exemplos recomendamos ao leitor o tema da classificação das superfícies compactas. Na figura 4.17b temos o toro desenhado por Leonardo da Vinci; o artista Paollo Ucello já havia desenhado um toro.

O artista renascentista Fra Giovanni também havia desenhado um toro num de seus painéis de intarsia (mosaico feito de madeira).

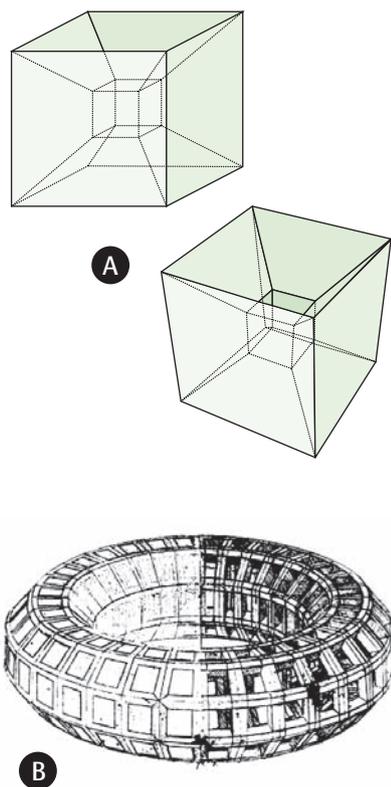


Figura 4.17

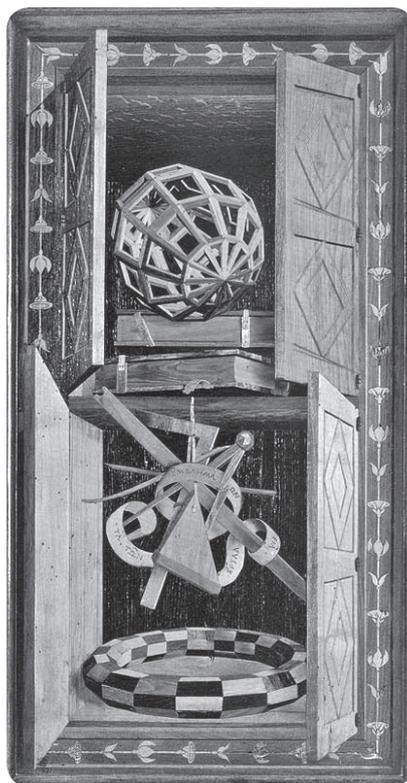


Figura 4.18

Poliedros existem na natureza com relativa abundância entre diversos tipos de pedras e de cristais. Alguns dodecaedros de bronze, feitos entre os séculos 2 d.C. e 4 d.C., foram encontrados em diversos países da Europa. Também foi encontrado um icosaedro,



Figura 4.19

que assim como o dodecaedro, não se descobriu utilidade deles para os povos antigos.

A definição de poliedro é muito geral e complexa para obtermos resultados matemáticos com as técnicas que dispomos. Devido a isto, daremos uma definição de poliedros adequada aos nossos fins; porém, antes precisamos formalizar alguns conceitos preliminares.

Definição 4.5. Um conjunto X do espaço \mathbb{R}^3 é convexo se o segmento de reta definido por quaisquer dois pontos $P, Q \in X$ está contido em X ; isto é, $\overline{PQ} \subset X$ (figura 4.20).

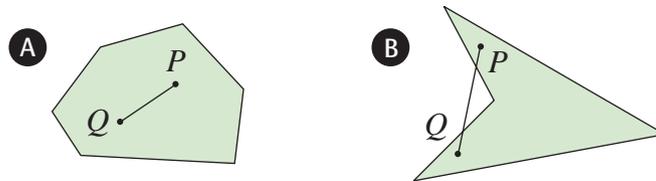


Figura 4.20 – (a) convexo, (b) não convexo

Definição 4.6. Um conjunto X do espaço é limitado se existe uma esfera $S_r(P)$ tal que $X \subset S_r(P)$ (figura 4.21 – nesta figura, considere X o conjunto sombreado). O mesmo conceito aplica-se quando X está contido no plano.

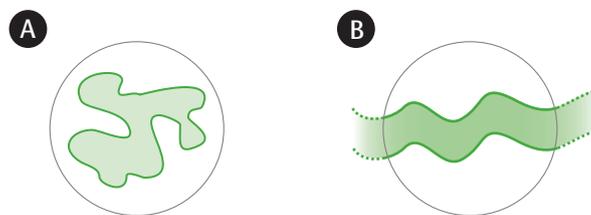


Figura 4.21 – (a) limitado, (b) ilimitado

4.2 Contando Vértices, Arestas e Faces

Dado um poliedro \mathcal{P} , denotaremos o número de faces de n -lados por F_n , onde $n \geq 3$. Assim,

$$F = F_3 + F_4 + \dots + F_n.$$

O número de vértices sobre os quais incidem n arestas denotamos por A_n ; daí,

$$A = A_3 + A_4 + \dots + A_n.$$

Definição 4.7. Um poliedro \mathcal{P} é um \mathcal{S} -poliedro se existe uma esfera $S_R(P)$ e uma função $f: \mathcal{P} \rightarrow S_R(P)$ que seja bijetora e contínua.

Observação. O que significa a função $f: \mathcal{P} \rightarrow S_R(P)$ ser contínua? Para definirmos o conceito de continuidade necessitamos de técnicas que vão além do conteúdo apresentado, por isso não definiremos. No entanto, em todo poliedro convexo que admite uma esfera no seu interior podemos definir uma função $f: \mathcal{P} \rightarrow S_R(P)$ contínua da seguinte maneira: seja O o centro da esfera e P um ponto sobre o poliedro; seja P' o ponto de interseção da reta \overline{OP} com a esfera S_R . Ao definirmos $f(P) = P'$ obtemos uma função contínua. Dentre os exemplos citados em 4.1, observamos que os poliedros platônicos e os arquimedianos admitem uma esfera inscrita sobre a qual podemos projetar os poliedros para obter uma função contínua e bijetora. Os únicos sólidos, dentre os apresentados, que não são \mathcal{S} -poliedros são os monstros.

Uma característica importante dos \mathcal{S} -poliedros é que cada aresta é a interseção de duas faces. Assim, ao nos restringirmos a classe dos \mathcal{S} -poliedros podemos obter uma relação entre A e F contando o número de arestas em cada classe de polígonos: os triângulos tem 3 arestas, os quadriláteros 4, os pentágonos 5 e os n -ágonos n . Como num \mathcal{S} -poliedro cada aresta é a interseção de duas faces, segue que

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots + nF_n. \quad (4.1)$$

Podemos fazer o mesmo ao contarmos os vértices, pois cada vértice pertence exatamente a uma aresta:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots + nV_n. \quad (4.2)$$

Decorre do processo de contagem acima que valem as seguintes desigualdades para um \mathcal{S} -poliedro;

$$\text{a) } 2A \geq 3F, \quad \text{b) } 2A \geq 3V. \quad (4.3)$$

As demonstrações de ambas são idênticas e bastante simples. No caso (a),

$$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_n) + F_4 + 2F_5 + 3F_6 + \dots + (n-3)F_n \geq 3F.$$

A igualdade $2A = 3F$ ocorre se, e somente se, $F_4 = F_5 = \dots = F_n = 0$, ou seja, se o poliedro tiver apenas faces triangulares. Se as faces forem todas de n -lados segue que $2A = nV$.

4.2.1 Relação de Euler

O estudo dos poliedros tem apelo estético e matemático. Além disto, é revelador. Uma das relações mais interessantes na teoria é a conhecida característica de Euler de um poliedro;

Definição 4.8. A característica de Euler de um poliedro \mathcal{P} é o número

$$\chi(\mathcal{P}) = V - A + F. \quad (4.4)$$

O objetivo desta seção é mostrar que para todo \mathcal{S} -poliedro vale a relação de Euler

$$\chi(\mathcal{P}) = 2. \quad (4.5)$$

Uma observação interessante é que em cada vértice v de um poliedro \mathcal{P} temos a soma $\theta(v) = \sum_i \theta_i$ dos ângulos θ_i das faces incidentes à v . Se $\theta(v) = 2\pi$, então todas as faces incidindo em v podem ser transformadas numa única, pois são planares.

Definição 4.9. O defeito de um poliedro espacial no vértice v_i é a diferença

$$\delta(v_i) = 2\pi - \theta(v_i).$$

Exemplo. No cubo, o defeito em cada vértice é $\delta_c = \frac{\pi}{2}$, no tetraedro é π , no octaedro é $\frac{2\pi}{3}$, no dodecaedro é $\frac{\pi}{5}$ e no icosaedro é $\frac{\pi}{3}$. Além disto, como observou René Descartes, em todo poliedro de Platão vale a igualdade

$$\delta(\mathcal{P}) = 4\pi.$$

4.3 Poliedros Planos

Um poliedro é plano se ele pode ser desenhado no plano. Isto ocorre sempre que a soma dos ângulos em cada vértice do poliedro é igual a 2π . Um polígono é um poliedro plano, a união de um número finito de polígonos no plano cujas interseções satisfazem a definição de poliedro é um poliedro.

Uma observação importante é que um poliedro plano possui uma **curva poligonal fechada** simples que o limita no plano. Isto é uma manifestação do seguinte resultado geometricamente óbvio, porém difícil de demonstrar.

Teorema 4.10. Teorema da Curva de Jordan – Uma curva fechada e simples no plano decompõe o plano em duas regiões distintas, uma limitada e outra ilimitada.

Proposição 4.11. Se \mathcal{P} é um poliedro plano, então

$$\mathcal{X}(\mathcal{P}) = 1.$$

Demonstração. Suponhamos que o poliedro está desmontado de forma que cada peça seja uma face. Vamos construí-lo começando por uma face com n lados denotada por F_n^1 . Um polígono de n lados tem n vértices, n arestas e 1 face e

$$\mathcal{X}(F_n^1) = V - A + F = n - n + 1 = 1.$$

Curva poligonal fechada

Curva formada por segmentos de reta que começam num vértice e retornam ao vértice sem se auto interceptarem.

De acordo com a definição de poliedro há duas possibilidades para a interseção de duas faces: (a) elas encontram-se numa aresta, ou (b) elas encontram-se num vértice. Seja F_k^2 a próxima peça (face) que identificaremos à F_n^1 :

- a) uma aresta a' de F_k^2 é identificada a uma aresta a de F_n^1 .
Então,

$$\mathcal{X}(F_n^1 \cup F_k^2) = 1 + [(k-2) - (k-1) + 1] = 1$$

- b) a interseção $F_n^1 \cap F_k^2$ é um vértice;

$$\mathcal{X}(F_n^1 \cup F_k^2) = 1 + [(k-1) - k + 1] = 1.$$

Por indução sobre o número de faces vamos assumir que após termos identificado $n-1$ faces obtemos o poliedro plano $F(n-1)$ e que $\mathcal{X}(F(n-1)) = 1$. Suponhamos que a última face F a ser colada é um polígono de m lados. Se a identificação de F a $F(n-1)$ seguir as condições descritas anteriormente, então pelo mesmo cálculo temos que $\mathcal{X}(F(n-1) \cup F) = 1$, pois

$$\mathcal{X}(F(n-1) \cup F) = 1 + (m-2) - (m-1) + 1 = 1.$$

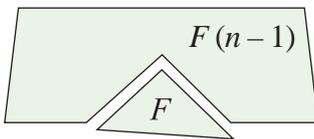


Figura 4.22

Pode ocorrer que, ao montarmos o poliedro, sejam identificados l arestas adjacentes de F ($l \leq k$) com l arestas de $F(n-1)$ já colocadas. Neste caso, temos $l+1$ vértices identificados como ilustra a figura 4.22:

$$\mathcal{X}(F(n-1) \cup F) = 1 + [(m-l-1) - (m-l) + 1] = 1.$$

O conjunto das **arestas no bordo** da região obtida, após termos identificado todas as faces, é uma curva fechada simples. Segue do Teorema de Jordan que esta poligonal decompõe o plano em duas regiões distintas. A região limitada é o poliedro que havia sido desmontado.

■

Aresta no bordo

Uma aresta pertence ao bordo de um poliedro se ela pertence a uma única face do poliedro.

4.4 Grafos × Poliedros

Generalizaremos o conceito de poliedro uma vez que, para os resultados de contagem que estamos interessados, as arestas serem segmentos de reta é irrelevante, o que de fato interessa é a maneira como elas intersectam-se.

Definição 4.12. Um grafo G consiste de um conjunto finito de vértices $\mathcal{V}(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e de um conjunto finito de arestas $\mathcal{A}(G) = \{a_1, \dots, a_m\}$, onde cada aresta é uma curva ligando dois vértices que denominamos extremidades da aresta.

Existem diversas situações práticas nas quais os grafos são empregados para modelarem as questões, por exemplo:

- 1) qual a maneira de conectarmos as residências de um bairro a central telefônica de maneira que minimize os custos com fiação?
- 2) qual é a rota mais rápida para irmos de um local a outro dentro de uma cidade?
- 3) qual a melhor tabela para o campeonato nacional de futebol, levando-se em conta que é preciso minimizar as viagens?
- 4) em que ordem deve o carteiro entregar as cartas num bairro de maneira que minimize a distância percorrida?
- 5) quantas camadas o chip de um computador necessita de maneira que as conexões numa mesma camada não se cruzem?
- 6) quantas cores são necessárias para pintarmos um mapa de maneira que países vizinhos tenham cores distintas?

Enfim, existem inúmeras situações onde grafos são aplicados. Nosso foco será aplicá-los aos poliedros.

Uma maneira eficiente para especificarmos um grafo é através da sua matriz de adjacência.

Definição 4.13. Dado um grafo G com vértices indexados por $\mathcal{V}(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, a matriz de adjacência de G , denotada $A(G)$, é a matriz construída da seguinte maneira:

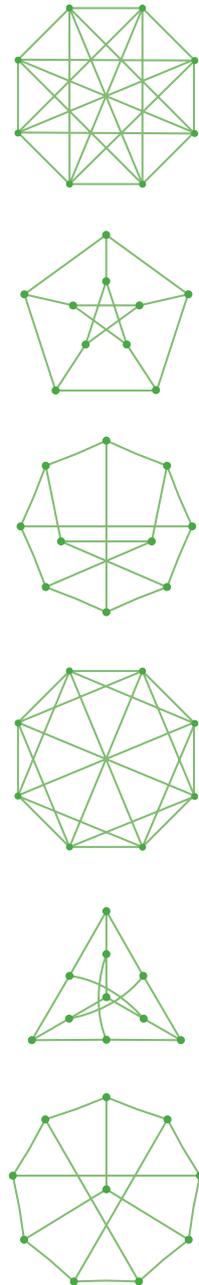


Figura 4.23 - Representações de grafos

- 1) considere i_{kl} o número de arestas que conectam o vértice v_k à v_l ;
- 2) $A(G)$ tem n linhas que correspondem cada uma a um vértice e n colunas também correspondendo cada uma a um vértice. Assim $A(G)$ possui n^2 entradas a_{ij} onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ não são conectados por uma aresta,} \\ i_{ij} & \text{havendo conexão por aresta entre os vértices } v_i, v_j. \end{cases}$$

Observação.

- 1) ao mudarmos a ordem de indexação do conjunto de vértices obtemos uma outra matriz de adjacência para o grafo.
- 2) a matriz de adjacência é simétrica, pois $i_{kl} = i_{lk}$.
- 3) a matriz de adjacência não é suficiente para determinar o grafo, é preciso também estabelecer uma bijeção entre os vértices, como indicam os grafos na figura 4.24.

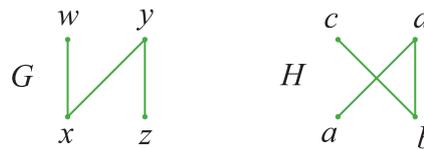


Figura 4.24

A relação biunívoca

$$x \leftrightarrow d, \quad y \leftrightarrow b, \quad z \leftrightarrow c, \quad w \leftrightarrow a$$

estabelece uma relação bijetora entre G e H . As matrizes de adjacência são

$$A(G) = \begin{matrix} & * & x & y & z & w \\ x & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ y & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ z & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ w & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{matrix}, \quad A(H) = \begin{matrix} & * & d & b & c & a \\ d & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ c & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{matrix}.$$

Definição 4.14. Um grafo G é considerado um grafo planar se pode ser representado sobre o plano de maneira que a interseção de suas arestas é ou um vértice do grafo ou vazia.

Exemplo.

- 1) Um poliedro plano é um grafo, porém a recíproca é falsa como mostra o exemplo na figura 4.25.
- 2) Gás-água-eletricidade. Num bairro bidimensional formado por 3 casas precisamos estabelecer as conexões de cada casa com as centrais de gás, de água e de eletricidade. Para evitarmos problemas entre os vizinhos estas conexões não podem se cruzar. Mostraremos que não é possível realizar esta tarefa, pois o grafo que representa a situação não é planar.

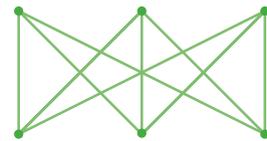


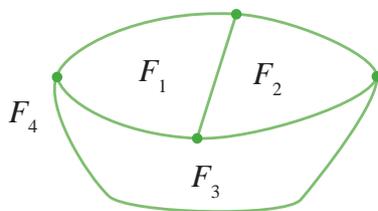
Figura 4.25

Nos exemplos de grafos apresentados observamos que um grafo planar divide o plano em diversas regiões. Isto é conseqüência do teorema da Curva de Jordan. Cada uma destas regiões é denominada uma face de G .

Definição 4.15. Dado um grafo G dizemos que F é uma face do grafo se existir uma curva C fechada e simples, formada por arestas do grafo, tal que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- 1) F seja limitada por C ,
- 2) a única curva de G que encontra F é a curva C .

Exemplo. Se pensarmos num grafo representando um mapa e as faces do grafo correspondendo aos países, temos (figura 4.26):

Figura 4.26 - $F_4 = \text{oceano}$

A curva fechada e simples mais externa do grafo, aquela que limita a união de todas as faces do grafo, é o bordo de uma região ilimitada que denominamos oceano (figura 4.26) e que consideramos como uma face do grafo.

Definição 4.16. A característica de Euler de um grafo G que possui V vértices, A arestas e F faces contadas com o oceano é

$$\chi(G) = V - A + F.$$

Teorema 4.17. Se G é um grafo planar, então

$$\mathcal{X}(G) = 2.$$

Demonstração. Ao substituímos as arestas de G por segmentos de reta obtemos um poliedro plano \mathcal{P}_G , nesta situação dizemos que G e \mathcal{P}_G são equivalentes. A única diferença entre G e \mathcal{P}_G está na forma das arestas e no fato de para G também computarmos o oceano como uma face, no resto eles coincidem; portanto,

$$\mathcal{X}(G) = \mathcal{X}(\mathcal{P}_G) + 1 = 2.$$

Porém, nem sempre um grafo é um poliedro plano. Neste caso, o que temos é a presença de um vértice de G que se retirado decompõe o grafo em dois ou mais subgrafos distintos; suponhamos que sejam apenas dois, então as seguintes situações podem ocorrer:

- a) os subgrafos estão conectados por uma aresta (figura 4.27a).
- b) os subgrafos estão conectados por um vértice (figura 4.27b).

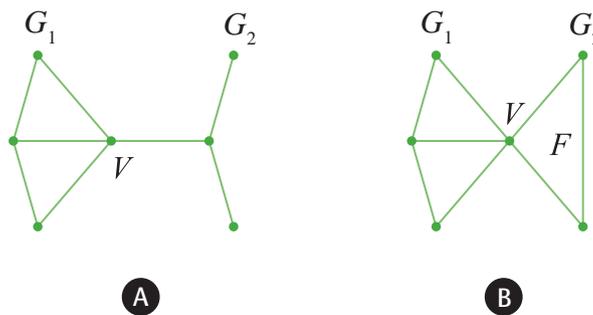


Figura 4.27

No caso (a), suponhamos que $G = G_1 \cup G_2$, onde G_1 e G_2 sejam equivalentes a poliedros planos e a seja uma aresta de G_2 com um vértice $v \in G_1$. Assim,

$$\mathcal{X}(G_1 \cup \{a\}) = 2 + (1 - 1 + 0) = 2.$$

No caso (b), suponhamos que F seja a face de G_2 cujo vértice $v \in G_1$, então

$$\mathcal{X}(G_1 \cup F) = 2 + (1 - 2 + 1) = 2.$$

Consequentemente, $\mathcal{X}(G) = 2$.

■

A seguir, mostraremos que um \mathcal{S} -poliedro é equivalente a um grafo plano. Para isto, precisamos projetar a esfera sobre um plano. A projeção estereográfica serve para projetarmos a superfície de uma esfera sobre um plano. Por exemplo, ao fazermos um mapa mundi projetamos a superfície da Terra sobre o plano.

Para definirmos a projeção estereográfica fixamos um sistema de coordenadas xyz com origem em O , a esfera S_R (centrada em O e com raio R) e o plano α_{xy} gerado pelas retas \overline{OX} e \overline{OY} . Sobre a esfera marcamos o ponto $N = (0, 0, 2R)$, denominado pólo norte. Agora, dado um ponto $P = (x, y, z)$ traçamos a semi-reta \vec{l}_{NP} e marcamos o ponto $P' = (x', y', 0)$ onde \vec{l}_{NP} corta o plano α_{xy} . O ponto P' é a projeção estereográfica de P (figura 4.28).

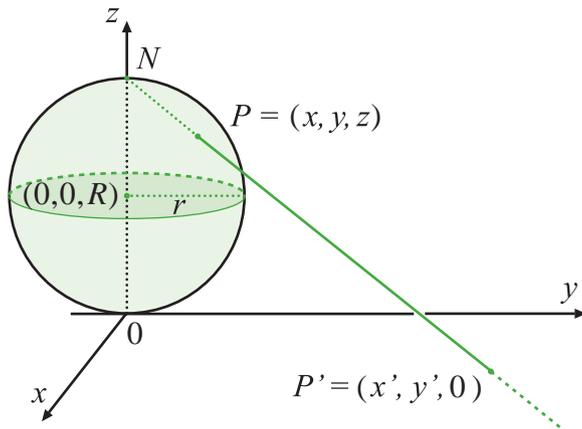


Figura 4.28

A projeção estereográfica induz a $\pi_e : S_R - \{N\} \rightarrow \alpha_{xy}$ (função bijetora), onde $\pi_e(P) = P'$ é o ponto obtido acima. Observamos a necessidade de retirarmos o pólo norte para realizarmos a projeção. Além disto, observamos que ao projetarmos as regiões muito próximas do ponto N elas aumentam de escala, o que justifica a ilha da Groenlândia aparecer em alguns mapas com uma área comparável a da Austrália.

Vamos aplicar a projeção estereográfica aos poliedros. Porém, antes precisamos projetá-los sobre a esfera.

Definição 4.18. Um grafo esférico é um grafo cujos vértices, arestas e faces pertencem à superfície de uma esfera. Dizemos que o grafo é um poliedro esférico (figura 4.29) se ele satisfaz as seguintes propriedades:

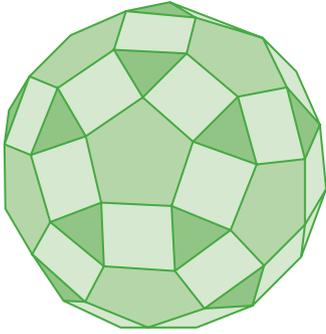


Figura 4.29

- 1) a interseção de duas arestas é ou um vértice ou vazia;
- 2) cada aresta é a interseção de duas faces;
- 3) a interseção de duas faces é ou um vértice, ou uma aresta ou vazia.

Observação. Se G^e é um grafo esférico, então todo ponto sobre a esfera pertence a alguma face de G^e . Isto também se verifica no plano quando levamos em conta a região oceânica.

Através da projeção estereográfica temos que um grafo plano corresponde a um grafo esférico e vice-versa. Observamos que o oceano associado a um grafo planar é mapeado pela projeção estereográfica sobre uma região da esfera contendo o pólo norte N . Decorre desta observação o seguinte resultado:

Teorema 4.19. Seja G^e um grafo esférico, então

$$\mathcal{X}(G^e) = 2. \quad (4.6)$$

Demonstração. Seja O o centro da esfera. Escolhemos um ponto N sobre a esfera que pertença ao interior de uma face de G^e e consideremos o plano α tangente à esfera e perpendicular à reta \overline{ON} . Seja $G = \pi_\alpha G^e$ o grafo plano equivalente a G^e . Ao revertermos a projeção estereográfica, a região oceânica de G é levada sobre a face F que contém N ; ou seja, G^e e G possuem o mesmo número de vértices, arestas e faces. Portanto,

$$\mathcal{X}(G^e) = \mathcal{X}(G) = 2. \quad \blacksquare$$

Decorre da definição 4.7, na seção 4.2, que um \mathcal{S} -poliedro \mathcal{P} é equivalente a um grafo esférico G^e . Chegamos assim ao resultado principal:

Teorema 4.20. (Euler) Se \mathcal{P} é um \mathcal{S} -poliedro, então

$$\mathcal{X}(\mathcal{P}) = 2. \quad (4.7)$$

Corolário 4.21. Se \mathcal{P} é um \mathcal{S} -poliedro com V vértices, A arestas e F faces, então $A \leq 3V - 6$. Caso nenhuma das faces seja um triângulo, então $A \leq 2V - 4$.

Demonstração. Decorre da inequação $2A \geq 3F$ (4.3(a)) e da identidade 4.7 que $A \leq 3V - 6$. Não havendo faces triangulares, a mesma inequação implica em $2A \geq 4F$. Conseqüentemente,

$$8 = 4V - 4A + 4F \leq 4V - 4A + 2A \Rightarrow A \leq 2V - 4.$$

■

Podemos aplicar o corolário à questão do exemplo no qual três casas devem ser ligadas às centrais de gás, água e eletricidade sem que haja cruzamento das conexões. Veja que ao efetuarmos ligações temos 6 vértices e 9 arestas e nenhuma face triangular, portanto $2(6) - 4 = 8 \leq 9$. Assim, concluímos que não é possível realizar as conexões num plano sem que haja interseções entre as conexões.

Observação. A definição 4.7, na seção 4.2, é baseada nos exemplos de poliedros que admitem uma projeção sobre a esfera de maneira que a projeção seja contínua e bijetora. De fato, existe uma questão bastante difícil que é caracterizar os poliedros que limitam uma região do espaço que possa ser deformada no interior de uma esfera. Algo análogo ao Teorema da Curva de Jordan no espaço, onde trocaríamos curvas por superfícies. Acontece que no espaço, a generalização do teorema de Jordan é falsa. Para o leitor interessado recomendamos procurar por esferas cornudas de Alexandroff.

4.5 Classificação dos Poliedros Regulares

A relação de Euler (4.5) é suficiente para obtermos a classificação dos poliedros de Platão. Eles têm as seguintes características:

- 1) todas as faces são polígonos regulares congruentes entre si;
- 2) o número de arestas incidindo sobre cada um dos vértices é sempre o mesmo;
- 3) pertencem à classe dos \mathcal{S} -poliedros.

Nos exemplos apresentados de poliedros platônicos é fácil verificarmos a última condição uma vez que cada um dos sólidos admite uma esfera inscrita e o sólido limitado por eles é convexo. Sendo assim, eles satisfazem à relação de Euler

$$V - A + F = 2.$$

Suponhamos que todas as faces sejam polígonos regulares de n lados, então decorre da relação 4.1 que

$$A = \frac{nF}{2}. \quad (4.8)$$

Também assumimos que em cada vértice incidem p arestas, ou seja $V = V_p$ na relação 4.2. Assim,

$$A = \frac{pV}{2}. \quad (4.9)$$

Substituindo as relações 4.8 e 4.9 na relação de Euler, segue que

$$\frac{nF}{2} - \frac{pF}{2} + F = 2 \Rightarrow F = \frac{4p}{2p - 2n - np}.$$

Como o número de faces é finito, devemos ter $2p - 2n - np > 0$, ou seja

$$\frac{n}{n-2} > p.$$

Porém, num poliedro, temos $p \geq 3$, da onde $n < 6$. A seguir analisaremos os casos possíveis:

1) $n = 3$.

$$F = \frac{4p}{6-p} \Rightarrow \begin{cases} p = 3 \rightsquigarrow F = 4 & \text{tetraedro,} \\ p = 4 \rightsquigarrow F = 8 & \text{octaedro,} \\ p = 5 \rightsquigarrow F = 5 & \text{icosaedro.} \end{cases}$$

2) $n = 4$.

$$F = \frac{2p}{4-p} \Rightarrow p = 3 \rightsquigarrow F = 6 \text{ cubo.}$$

3) $n = 5$.

$$F = \frac{4p}{10-3p} \Rightarrow p = 3 \rightsquigarrow F = 12 \text{ dodecaedro.}$$

No texto a seguir, apresentamos um extrato (retirado de CUNHA; MOREIRA; SAGRADO; MARQUES, 2009) do texto de Platão, incluído no diálogo de Timeu, que justifica porque os poliedros regulares foram denominados *Poliedros de Platão*:

Em primeiro lugar, é claro para toda a gente que o fogo, a terra e o ar são corpos, e que todos os corpos são sólidos. Todos os corpos são iluminados por superfícies e todas as superfícies retilíneas são compostas por triângulos. Há dois tipos fundamentais de triângulos, cada um deles tendo um ângulo reto e dois ângulos agudos; num deles estes dois ângulos são metade de ângulos retos, sendo subentendidos por lados iguais; no outro, são desiguais, sendo subentendidos por lados desiguais. Postulamos isto como a origem do fogo e dos outros corpos, combinando o nosso argumento a verossimilhança e a necessidade; as suas origens últimas são conhecidas dos deuses e dos homens a que os deuses amam.



Figura 4.30

Devemos continuar a indagar quais são os quatro corpos mais perfeitos possível que embora diferentes uns dos outros, são capazes de se transformar uns nos outros por resolução. Se conseguirmos encontrar a resposta para esta questão temos a verdade sobre a origem da terra e do fogo e dos dois termos entre eles; porque nunca admitiremos que haja corpos visíveis mais perfeitos do que estes, cada um do seu tipo. Assim, devemos fazer o possível para construir quatro tipos de corpos perfeitos e defender que compreendemos suficientemente a sua natureza para atingirmos o nosso objetivo. Dos dois triângulos fundamentais, portanto, o isósceles tem uma única variedade e o escaleno um número finito. Devemos por conseguinte escolher, se vamos começar de acordo com os nossos próprios princípios, o mais perfeito deste número infinito. Se alguém nos puder indicar uma melhor seleção de triângulos para a

construção dos quatro corpos, essa sugestão será bem-vinda; mas pela nossa parte propomo-nos passar por cima de todos os restantes e selecionar um único tipo, aquele cujo par compões um triângulo eqüilátero. Seria uma história demasiado longa explicar a razão, mas se alguém conseguir apresentar uma prova de assim não é, essa proeza será bem recebida. Assumamos então que estes são os dois triângulos a partir dos quais o fogo e os outros corpos são construídos: um isósceles e o outro com um lado maior cujo quadrado é o triplo do menor...

Temos que descrever seguidamente a figura geométrica de cada corpo e indicar o número de seus componentes. Começaremos com a construção da figura mais simples e mais pequena. A sua unidade básica é o triângulo cuja hipotenusa tem o dobro do seu lado menor. Se juntarem dois destes triângulos, com a hipotenusa como diâmetro da figura resultante, e se repetir o processo três vezes, fazendo coincidir os diâmetros e os lados menores da três figuras no mesmo vértice, o resultado é um simples triângulo eqüilátero composto de seis unidades básicas. Ao juntarem-se quatro triângulos eqüiláteros, três dos seus ângulos planos encontram-se para formar um só ângulo sólido, aquele que aparece imediatamente a seguir ao mais obtuso dos ângulos planos; e quando quatro destes ângulos tiverem sido formados o resultado é a figura sólida mais simples, que divide a superfície da esfera, circunscrevendo-a em partes iguais e similares.

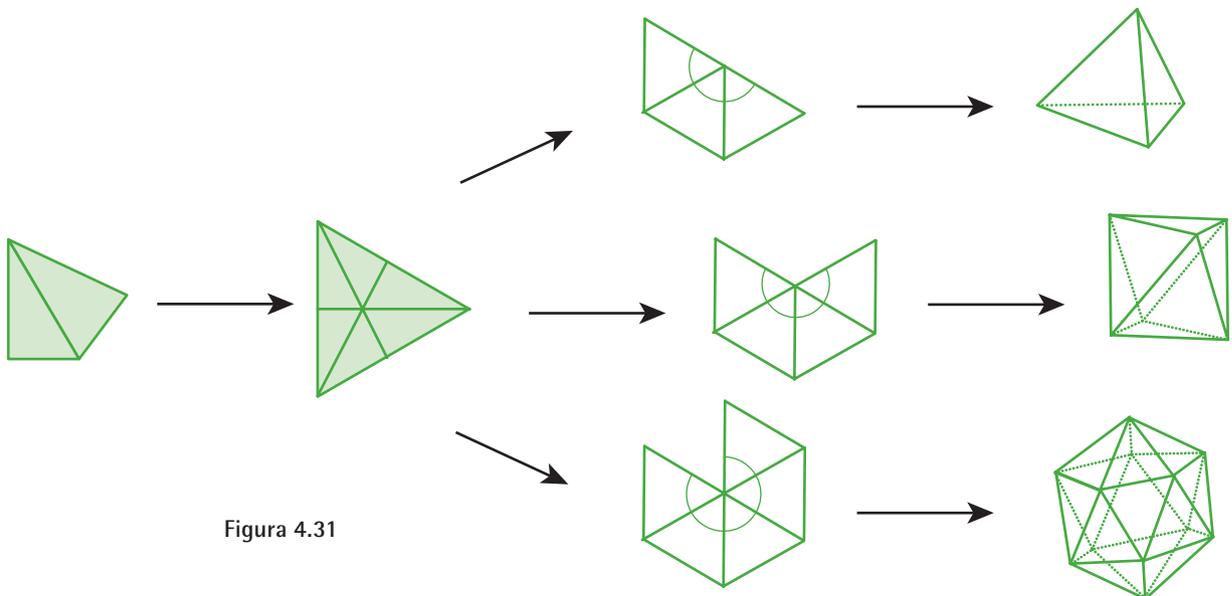


Figura 4.31

A segunda figura é composta dos mesmos triângulos básicos reunidos para formar oito triângulos eqüiláteros e que forma um só ângulo sólido a partir de quatro planos. A formação de seis destes sólidos completa a figura número dois.

A terceira figura é formada a partir de cento e vinte triângulos básicos e tem doze ângulos sólidos, cada um deles limitado por cinco triângulos eqüiláteros planos e vinte faces, cada uma das quais é um triângulo eqüilátero.

Depois da construção destas três figuras dispensa-se a primeira das nossas unidades básicas e utiliza-se o triângulo isósceles para a produção do quarto corpo. Quatro destes triângulos são juntos com os seus ângulos retos encontrando-se num vértice para formarem um quadrado. Seis quadrados postos em conjunto completam ângulos sólidos, cada um deles composto por três ângulos retos planos. A figura do corpo resultante é o cubo, com seis faces quadradas planas.

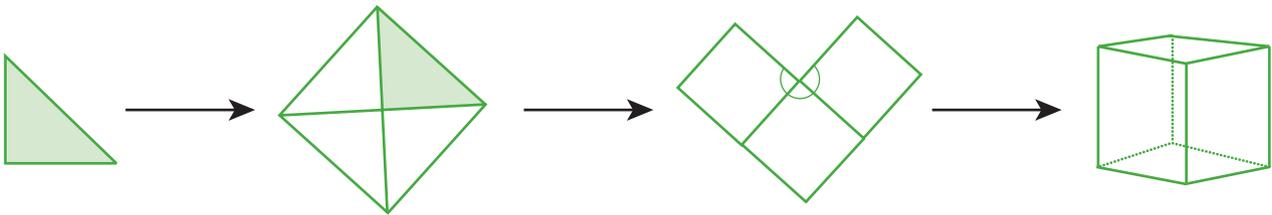


Figura 4.32

Faltava ainda uma quinta construção que o deus utilizou para organizar todas as constelações do céu.

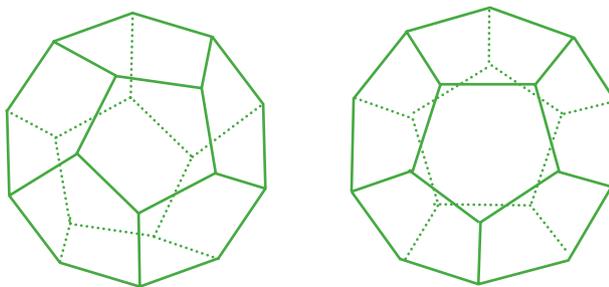


Figura 4.33

...devemos prosseguir distribuindo as figuras cujas origens acabamos de descrever pelo fogo, terra, água e ar. Atribuíamos

o cubo à terra, uma vez que é o mais imóvel dos quatro corpos e tem a forma mais estável, sendo estas características que deve possuir a figura com as formas mais estáveis. E relativamente aos triângulos básicos assumimos que o isósceles tem uma base naturalmente mais estável que o escaleno, e que das figuras eqüiláteras compostas por eles o quadrado é, todo ou em parte uma base mais firme que do que o triângulo eqüilátero. Mantemos assim o nosso princípio de verossimilhança atribuindo-o à terra e, de forma semelhante à água a menos móvel das outras figuras, a mais móvel ao fogo e a menos cortante a água. Resumindo, a figura que tem o menor número de faces deverá ser, pela natureza das coisas, a mais móvel, assim como a mais cortante e mais penetrante e, finalmente, sendo composta pelo menor número de partes semelhantes, a mais leve. A nossa segunda figura será em todas essas características, e a nossa terceira será a terceira. Deste modo, a lógica e a verossimilhança exigem que olhemos para a pirâmide como figura sólida que é a unidade básica ou a semente do fogo; e podemos olhar a segunda das figuras que construímos como a unidade básica do ar, a terceira a da água.

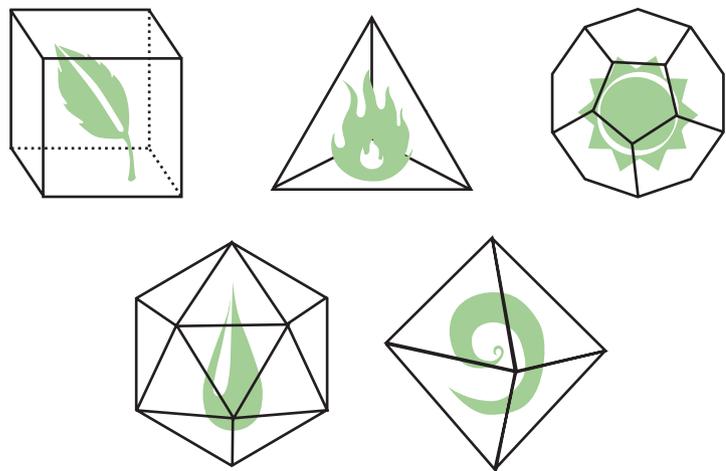


Figura 4.34

Referências

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana**. Rio de Janeiro: SBM, 1996. (Coleção do Professor de Matemática).

BATISTA, E.; CARVALHO, N. T. B.; DORIA, C. M. **Tópicos Especiais em Matemática II**. (Curso de Complementação para Licenciatura em Matemática). Salvador: Secretaria da Educação do Estado da Bahia, 2002.

BECKMANN, P. **A History of π** , 3. ed. New York: ST. Martins Press, 1971.

BEZERRA, M. J. ; PUTNOKI J. C. (Jota). **Bezerra, Matemática**. 4. ed. São Paulo: Scipione, 1996.

CARONETT, T. H. **Exercícios de Geometria**, tomos I – VIII. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1961.

CARVALHO, P. C. P. ; LIMA, E. L. ; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2002. (Coleção do Professor de Matemática).

CUNHA, M. H.; MOREIRA, M. I.; SAGRADO, M. I.; MARQUES, M. M. **Os Poliedros**. Disponível em: <<http://mathematikos.psico.ufrgs.br/disciplinas/ufrgs/mat01039032/poliedros.pdf>>. Acesso em 23 out. 2009.

O texto usado como referência resultou em um conjunto de trabalhos escritos por professores participantes de um Curso de Especialização realizado em 1993 no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Associação dos professores de matemática, em Portugal: <www.apm.pt>.

GUELLI, C.; IEZZI, G.; DOLCE, O. **Trigonometria**. São Paulo: Moderna, [s.d.].

HEILBRON, J. L. **Geometry Civilized, History, Culture and Technique**. Oxford: Clarendo Press, 1998.

IMENES, L. P. M.; LELLIS, M. C. **Microdicionário de Matemática**. São Paulo: Scipione, 1998.

NIVEN, I. **Números Racionais e Irracionais**. Rio de Janeiro: SBM, 1984. (Coleção Matemática Elementar).

ROXO, E.; CUNHA, H. L.; PEIXOTO, R.; DACORSO, C. **Matemática 2º ciclo, 2ª série**. 2. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1944.

RÜDIGER, T. O avanço da Geometria. **Scientif American: A ciência na idade média**. São Paulo, vol. 1, p. 46-53, 2005. Coleção História.

STRATHER, P. **Arquimedes e a Alavanca**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998. (Coleção Cientistas em 90 minutos).

STRATHER, P. **Pitágoras e seu Teorema**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1997. (Coleção Cientistas em 90 minutos).